Ρίζες πραγματικών αριθμών

Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Ορισμός:
Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α είναι ο μη αρνητικός αριθμός β που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον α, δηλαδή:

$$\sqrt{\alpha}=\beta \Leftrightarrow \beta^2=\alpha, \quad \alpha,\beta \geq 0$$

<u>Παρατήρηση</u>:
Η $\sqrt{\alpha}$ ορίζεται όταν $\alpha \geq 0$ και είναι $\sqrt{\alpha} \geq 0$ (το ´´=´´ ισχύει για $\alpha = 0$).

Ιδιότητες:

- ✓ $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$
- ✓ $\sqrt{\alpha^2}=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$, $\alpha \geq 0$
- ✓ $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta \geq 0$ και γενικότερα για ν αριθμούς
  $\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_2}...\sqrt{\alpha_\nu}=\sqrt{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu}$, $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu \geq 0$
- ✓ $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$
- ✓ $\sqrt{\alpha^\kappa}=\left(\sqrt{\alpha}\right)^\kappa$, $\alpha \geq 0$ και $\kappa \in \mathbb{Z}_+$
- ✓ $\sqrt{\alpha^2\beta}=|\alpha|\sqrt{\beta}$, $\beta \geq 0$

<u>Παρατήρηση:</u>
$\alpha<\beta \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}<\sqrt{\beta}$, $\alpha,\beta \geq 0$

ν-οστή ρίζα πραγματικού αριθμού

Ορισμός:
Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α είναι ο μη αρνητικός αριθμός β που όταν υψωθεί στη ν μας δίνει τον α, δηλαδή:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}=\beta \Leftrightarrow \beta^\nu=\alpha, \quad \alpha,\beta \geq 0$$

Για $\nu = 1$ γράφουμε $\sqrt[1]{\alpha}=\alpha$.
Για $\nu = 2$ γράφουμε $\sqrt[2]{\alpha}=\sqrt{\alpha}$.

<u>Παρατήρηση:</u>
Η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ορίζεται όταν $\alpha \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$ και είναι $\sqrt[\nu]{\alpha} \geq 0$ (το ´´=´´ ισχύει για $\alpha = 0$).

Ιδιότητες:

- Αν ν άρτιος, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$

  Αν ν περιττός, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$, $\alpha \geq 0$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$, $\alpha \geq 0$
- $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$ και γενικότερα για ν αριθμούς

  $\sqrt[\nu]{\alpha_1} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \geq 0$
- $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\kappa$, $\alpha \geq 0$ και $\kappa \in \mathbb{Z}_+$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$
- $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$, $\alpha \geq 0$
- $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, $\alpha \geq 0$

<u>Παρατήρηση:</u>

$\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Ορισμός:

Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$$

Ακόμα, αν μ,ν θετικοί ακέραιοι, ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$

Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$

- $\alpha>0$
  - $\xrightarrow{\nu \text{ άρτιος}} x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}$ ή $x = -\sqrt[\nu]{\alpha}$
  - $\xrightarrow{\nu \text{ περιττός}} x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}$
- $\alpha<0$
  - $\xrightarrow{\nu \text{ άρτιος}} x^\nu = \alpha$, αδύνατη
  - $\xrightarrow{\nu \text{ περιττός}} x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{|\alpha|}$
- $\xrightarrow{\alpha=0} x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις:

i. $\sqrt{x-3}$ ii. $\sqrt[3]{6+3x}$ iii. $\sqrt{\dfrac{3x+2}{4}-2}$

iv. $\sqrt{-(x+2)^2}$ v. $\sqrt{4-x^2}$ vi. $\sqrt{|x-2|-3}$

vii. $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}$ viii. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{1-x}}$ ix. $\sqrt{|x|-2x}$

Λύση:

Η $\sqrt[\nu]{a}$ ορίζεται (έχει νόημα) όταν $a \geq 0$

i. Η $\sqrt{x-3}$ ορίζεται όταν $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

ii. Η $\sqrt[3]{6+3x}$ ορίζεται όταν $6+3x \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -2$

iii. Η $\sqrt{\dfrac{3x+2}{4}-2}$ ορίζεται όταν

$$\frac{3x+2}{4}-2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{4} \geq 2 \Leftrightarrow 3x+2 \geq 8 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2$$

iv. Η $\sqrt{-(x+2)^2}$ ορίζεται όταν

$$-(x+2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 \leq 0 \overset{(x+2)^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

v. Η $\sqrt{4-x^2}$ ορίζεται όταν $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq x^2 \Leftrightarrow 4 \geq |x|^2 \Leftrightarrow 2 \geq |x| \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

vi. Η $\sqrt{|x-2|-3}$ ορίζεται όταν

$$|x-2|-3 \geq 0 \Leftrightarrow |x-2| \geq 3 \Leftrightarrow x-2 \leq -3 \;\; ή \;\; x-2 \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -1 \;\; ή \;\; x \geq 5$$

vii. Η $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}$ ορίζεται όταν

$$x-2 \geq 0 \;\; και \;\; 3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \; και \; 3 \geq x \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$$

viii. Η $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{1-x}}$ ορίζεται όταν

$$x+2 \geq 0 \;\; και \;\; 1-x > 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \; και \; 1 > x \Leftrightarrow -2 \leq x < 1$$

ix. Η $\sqrt{|x|-2x}$ ορίζεται όταν

$$|x|-2x \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2x, & αν \;\; x \geq 0 \\ -x \geq 2x, & αν \;\; x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, & αν \;\; x \geq 0 \\ 3x \leq 0, & αν \;\; x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0$$

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\sqrt{200}-2\sqrt{18}-3\sqrt{32}+4\sqrt{50}$$

Λύση:

Αναλύουμε τους αριθμούς που βρίσκονται στα υπόριζα σε γινόμενο δύο αριθμών, ώστε ο ένας να είναι τέλειο τετράγωνο και ο άλλος να μην έχει παράγοντα που να είναι τέλειο τετράγωνο

Είναι $\sqrt{200}-2\sqrt{18}-3\sqrt{32}+4\sqrt{50}=\sqrt{100\cdot 2}-2\sqrt{9\cdot 2}-3\sqrt{16\cdot 2}+4\sqrt{25\cdot 2}=$

$=10\sqrt{2}-2\cdot 3\sqrt{2}-3\cdot 4\sqrt{2}+4\cdot 5\sqrt{2}=10\sqrt{2}-6\sqrt{2}-12\sqrt{2}+20\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

3. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i. $\sqrt{(x-3)^2}$, $\acute{o}\tau\alpha\nu\ x<3$

ii. $\sqrt{x^2-2x+1}$, $\acute{o}\tau\alpha\nu\ x\geq 1$

iii. $\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}+\dfrac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3}$, $\acute{o}\tau\alpha\nu\ |x|<2$

Λύση:

Σε παράσταση που περιέχει τετραγωνική ρίζα με υπόριζο τέλειο τετράγωνο, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\sqrt{a^2}=|a|$

i. Είναι $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|=-x+3$, διότι $x<3$

ii. Είναι $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=x-1$, διότι $x\geq 1$

iii. Είναι $\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}+\dfrac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3}=\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}+\dfrac{\sqrt{(x+3)^2}}{x+3}=$

$=\dfrac{|x-3|}{x-3}+\dfrac{|x+3|}{x+3}=\dfrac{-(x-3)}{x-3}+\dfrac{x+3}{x+3}=-1+1=0$,

διότι $|x|<2\Leftrightarrow -2<x<2$, άρα $x-3<0$ και $x+3>0$.

Επομένως $|x-3|=-(x-3)$ και $|x+3|=x+3$

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $\sqrt{3}\sqrt{3-\sqrt{3}}\sqrt{3+\sqrt{3}}$ ii. $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{5-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{5+\sqrt{2}}$

Λύση:

i. Είναι $\sqrt{3}\sqrt{3-\sqrt{3}}\sqrt{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3}\sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}=\sqrt{3}\sqrt{3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$

$=\sqrt{3}\sqrt{9-3}=\sqrt{3}\sqrt{6}=\sqrt{18}=\sqrt{9}\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

ii. Είναι $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{5-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{5+\sqrt{2}}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{\left(5-\sqrt{2}\right)\left(5+\sqrt{2}\right)}=$

$=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{5^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{25-2}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{23}=\sqrt[3]{92}$

5. Να γράψετε με τη μορφή μιας ρίζας τις παραστάσεις:

i. $\sqrt{3\cdot\sqrt[5]{3}}$ ii. $\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ iii. $\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$ iv. $\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt{3}$ v. $\sqrt[4]{5}:\sqrt[3]{3}$

Λύση:

i. Είναι $\sqrt{3\cdot\sqrt[5]{3}} = \sqrt{\sqrt[5]{3^5 3}} = \sqrt{\sqrt[5]{3^6}} = \sqrt[10]{3^6} = \sqrt[5\cdot2]{3^{3\cdot2}} = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{27}$

ii. Είναι $\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2^2 2}}} = \sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}} = \sqrt[4]{2\cdot\sqrt[6]{2^3}} =$

$= \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^6 2^3}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^9}} = \sqrt[24]{2^9} = \sqrt[8\cdot3]{2^{3\cdot3}} = \sqrt[8]{2^3} = \sqrt[8]{8}$

> Όταν εχουμε ρίζες που δεν είναι της ίδιας τάξης, τις μετατρέπουμε σε ρίζες της ίδιας τάξης (βρίσκοντας το Ε.Κ.Π των τάξεων)

iii. Είναι $\sqrt[3]{2}\sqrt{3} = \sqrt[3\cdot2]{2^2}\cdot\sqrt[2\cdot3]{3^3} = \sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{2^2\cdot3^3}$

iv. Είναι $\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt{3} = \sqrt[3\cdot4]{3^{2\cdot4}}\cdot\sqrt[4\cdot3]{3^{3\cdot3}}\cdot\sqrt[2\cdot6]{3^6} = \sqrt[12]{3^8}\cdot\sqrt[12]{3^9}\cdot\sqrt[12]{3^6} =$

$= \sqrt[12]{3^8\cdot3^9\cdot3^6} = \sqrt[12]{3^{23}} = \sqrt[12]{3^{12}\cdot3^{11}} = 3\cdot\sqrt[12]{3^{11}}$

v. Είναι $\sqrt[4]{5}:\sqrt[3]{3} = \sqrt[4\cdot3]{5^3}:\sqrt[3\cdot4]{3^4} = \sqrt[12]{5^3}:\sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{\dfrac{5^3}{3^4}}$

6. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ii. $\dfrac{10}{\sqrt[7]{5^4}}$ iii. $\dfrac{4}{\sqrt{2}-1}$

Λύση:

> Για να μετατρέψουμε ένα κλάσμα της μορφής $\dfrac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta^\kappa}}$, με $\nu>\kappa$, σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή, πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\kappa}}$

i. Είναι $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

ii. Είναι $\dfrac{10}{\sqrt[7]{5^4}} = \dfrac{10\cdot\sqrt[7]{5^3}}{\sqrt[7]{5^4}\cdot\sqrt[7]{5^3}} = \dfrac{10\cdot\sqrt[7]{5^3}}{\sqrt[7]{5^4 5^3}} = \dfrac{10\cdot\sqrt[7]{5^3}}{\sqrt[7]{5^7}} = \dfrac{10\cdot\sqrt[7]{5^3}}{5} = 2\cdot\sqrt[7]{5^3}$

> Για να μετατρέψουμε ένα κλάσμα της μορφής $\dfrac{\kappa}{\sqrt{\alpha}\pm\beta}$, σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή, πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή $\left(\sqrt{\alpha}\mp\beta\right)$ και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

iii. Είναι $\dfrac{4}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \dfrac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2} = \dfrac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1} = 4\left(\sqrt{2}+1\right)$

7. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i. $\dfrac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ ii. $\dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{6}+\sqrt{5}}$ iii. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$ iv. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{3}+1}$

Λύση:

i. Είναι
$$\frac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{12\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}=\frac{12\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$
$$=\frac{12\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{7-5}=\frac{12\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{2}=6\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$$

ii. Είναι
$$\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{11}-\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}{\left[\sqrt{11}+\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\right]\left[\sqrt{11}-\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\right]}=$$
$$=\frac{\sqrt{11}-\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}-\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}{11-\left(6+2\sqrt{30}+5\right)}=\frac{\sqrt{11}-\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}{-2\sqrt{30}}=$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{11}}{2\sqrt{30}}=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{11}\right)\sqrt{30}}{2\sqrt{30}\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{180}+\sqrt{150}-\sqrt{330}}{2\cdot 30}=$$
$$=\frac{6\sqrt{5}+5\sqrt{6}-\sqrt{330}}{60}$$

Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες $(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^3-\beta^3$ και
$(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^3+\beta^3$

iii. Είναι
$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{3\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right]}=$$
$$=\frac{3\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\frac{3\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{5-2}=$$
$$=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}$$

iv. Είναι
$$\frac{4}{\sqrt[3]{3}+1}=\frac{4\left[\left(\sqrt[3]{3}\right)^2-\sqrt[3]{3}\cdot 1+1^2\right]}{\left(\sqrt[3]{3}+1\right)\left[\left(\sqrt[3]{3}\right)^2-\sqrt[3]{3}\cdot 1+1^2\right]}=$$
$$=\frac{4\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3+1^3}=\frac{4\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1\right)}{3+1}=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1$$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $16x^2 - 25 = 0$

ii. $4x^3 - 32 = 0$

iii. $3x^4 + 1 = 0$

iv. $7x^5 + 3 = 0$

v. $(x-6)^{10} = 0$

Λύση:

i. Είναι:

$$16x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow 16x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{25}{16}} \text{ ή } x = -\sqrt{\frac{25}{16}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \text{ ή } x = -\frac{5}{4}$$

ii. Είναι $\quad 4x^3 - 32 = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 32 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$

iii. Είναι $\quad 3x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^4 = -1 \Leftrightarrow x^4 = -\frac{1}{4}$, που είναι αδύνατη

iv. Είναι $\quad 7x^5 + 3 = 0 \Leftrightarrow 7x^5 = -3 \Leftrightarrow x^5 = -\frac{3}{7} \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{\frac{3}{7}}$

v. Είναι $\quad (x-6)^{10} = 0 \Leftrightarrow x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $(3x-2)^{2008} = x^{2008}$

ii. $(x-4)^5 + 243 = 0$

iii. $\sqrt{(x-5)^2} - \sqrt{(2-x)^2} = 2, \ \text{όταν} \ 2 \le x \le 5$

Λύση:

i. Είναι:

$$(3x-2)^{2008} = x^{2008} \Leftrightarrow 3x - 2 = x \text{ ή } 3x - 2 = -x \Leftrightarrow 2x = 2 \text{ ή } 4x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = \frac{1}{2}$$

ii. Είναι:

$$(x-4)^5 + 243 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^5 = -243 \Leftrightarrow (x-4)^5 = -3^5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = -\sqrt[5]{3^5} \Leftrightarrow x - 4 = -3 \Leftrightarrow x = 1$$

iii. Είναι:

$$\sqrt{(x-5)^2} - \sqrt{(2-x)^2} = 2 \Leftrightarrow |x-5| - |2-x| = 2 \overset{2 \le x \le 5}{\Leftrightarrow} (5-x) - (x-2) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 - x - x + 2 = 2 \Leftrightarrow -2x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$, που είναι δεκτή

10. Να δείξετε ότι:

i. $\sqrt{3}+\sqrt{2}>\sqrt{5}$

ii. $3+\sqrt{5}<\sqrt{8}+\sqrt{6}$

iii. $1+\sqrt{5}<\sqrt{7+2\sqrt{5}}$

iv. $\sqrt[3]{11}<\sqrt{7}$

Λύση:

Όταν τα μέλη ανισοτήτων είναι μη αρνητικοί αριθμοί, τα υψώνουμε σε δύναμη με κατάλληλο εκθέτη, ώστε να καταλήξουμε σε μια ανισότητα που ισχύει

i. Είναι $\sqrt{3}+\sqrt{2}>\sqrt{5}\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2>\left(\sqrt{5}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3+2\sqrt{6}+2>5\Leftrightarrow 2\sqrt{6}>0$, που ισχύει

ii. Είναι $3+\sqrt{5}<\sqrt{8}+\sqrt{6}\Leftrightarrow\left(3+\sqrt{5}\right)^2<\left(\sqrt{8}+\sqrt{6}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9+6\sqrt{5}+5<8+2\sqrt{48}+6\Leftrightarrow 6\sqrt{5}<2\sqrt{48}\Leftrightarrow 6\sqrt{5}<2\cdot 4\sqrt{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{5}<4\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(3\sqrt{5}\right)^2<\left(4\sqrt{3}\right)^2\Leftrightarrow 9\cdot 5<16\cdot 3\Leftrightarrow 45<48$, που ισχύει

iii. Είναι $1+\sqrt{5}<\sqrt{7+2\sqrt{5}}\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{5}\right)^2<\left(\sqrt{7+2\sqrt{5}}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+2\sqrt{5}+5<7+2\sqrt{5}\Leftrightarrow 6<7$, που ισχύει

iv. Είναι $\sqrt[3]{11}<\sqrt{7}\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{11}\right)^6<\left(\sqrt{7}\right)^6\Leftrightarrow\left[\left(\sqrt[3]{11}\right)^3\right]^2<\left[\left(\sqrt{7}\right)^2\right]^3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11^2<7^3\Leftrightarrow 121<343$, που ισχύει

11. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i. $1-\sqrt{3}$ και $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

ii. $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ και $\sqrt{21}+1$

Λύση:

i. Είναι $1-\sqrt{3}<0$ και $\sqrt{5}-\sqrt{2}>0$, οπότε $1-\sqrt{3}<\sqrt{5}-\sqrt{2}$

Όταν οι αριθμοί είναι θετικοί, αρκεί να συγκρίνουμε τα τετράγωνά τους

ii. Είναι:

$\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2=7+2\sqrt{21}+3=10+2\sqrt{21}$ και

$\left(\sqrt{21}+1\right)^2=21+2\sqrt{21}+1=22+2\sqrt{21}$

Παρατηρούμε ότι $10+2\sqrt{21}<22+2\sqrt{21}$, οπότε $\sqrt{7}+\sqrt{3}<\sqrt{21}+1$

12. i. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\left(1+2\sqrt{3}\right)^2 \text{ και } \left(1-2\sqrt{3}\right)^2$$

ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}}$$

Λύση:

i. Είναι:

$$\left(1+2\sqrt{3}\right)^2=1+4\sqrt{3}+12=13+4\sqrt{3} \text{ και}$$

$$\left(1-2\sqrt{3}\right)^2=1-4\sqrt{3}+12=13-4\sqrt{3}$$

ii. Είναι:

$$\mathrm{A}=\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}}\overset{(i)}{=}\sqrt{\left(1+2\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-2\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\left|1+2\sqrt{3}\right|-\left|1-2\sqrt{3}\right|=\left(1+2\sqrt{3}\right)-\left(2\sqrt{3}-1\right)=1+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1=2$$

13. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$

ii. $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

Λύση:

Μετασχηματίζουμε τις υπόριζες ποσότητες σε τέλεια τετράγωνα, βασιζόμενοι στις ταυτότητες $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\beta$ και $\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\beta$

i. Είναι $\sqrt{14+6\sqrt{5}}=\sqrt{9+2\cdot 3\sqrt{5}+5}=\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}=\left|3+\sqrt{5}\right|=3+\sqrt{5}$

ii. Είναι $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3-2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

14. i. Να αποδείξετε ότι $\left(4-\sqrt{5}\right)^2=21-8\sqrt{5}$

ii. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης $x^2\le 21-8\sqrt{5}$

Λύση:

i. Είναι $\left(4-\sqrt{5}\right)^2=16-8\sqrt{5}+5=21-8\sqrt{5}$

ii. Είναι:

$$x^2\le 21-8\sqrt{5}\overset{(i)}{\Leftrightarrow} x^2\le\left(4-\sqrt{5}\right)^2\Leftrightarrow|x|\le\left|4-\sqrt{5}\right|\Leftrightarrow|x|\le 4-\sqrt{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\left(4-\sqrt{5}\right)\le x\le 4-\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{5}-4\le x\le 4-\sqrt{5}\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=1$$

15. Να βρείτε τους x, y, z αν $\sqrt{x-3}+|3y-5x|+(4x-2y-z)^2=0$.

Λύση:

Το άθροισμα μη αρνητικών αριθμών είναι μηδέν όταν οι αριθμοί είναι μηδέν

Είναι:

$$\sqrt{x-3}+|3y-5x|+(4x-2y-z)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-3=0 \text{ και } 3y-5x=0 \text{ και } 4x-2y-z=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=3 \text{ και } y=5 \text{ και } z=2$$

16. i. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta$

ii. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

Λύση:

i. - Αν $\alpha+\beta<0$, τότε $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}<0$, που είναι άτοπο

- Αν $\alpha+\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2=(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } \beta=0$$

Επομένως η ισότητα $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta$ ισχύει όταν:

$$(\alpha=0 \text{ και } \beta \geq 0) \text{ ή } (\beta=0 \text{ και } \alpha \geq 0)$$

ii. Είναι:

$$\sqrt{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \overset{\alpha,\beta\geq 0}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha+\beta \leq \alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta \Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{\alpha\beta}, \text{ που ισχύει}$$

17. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sqrt{x^2+1}>x$.

Λύση:

- Αν $x<0$, τότε προφανώς ισχύει $\sqrt{x^2+1}>x$

- Αν $x \geq 0$, τότε $\sqrt{x^2+1}>x \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2>x^2 \Leftrightarrow x^2+1>x^2 \Leftrightarrow 1>0$, που ισχύει

Επομένως ισχύει $\sqrt{x^2+1}>x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

18. Αν $0<\alpha\le\beta$, να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha\le\dfrac{\alpha+\beta}{2}\le\beta$ ii. $\alpha\le\sqrt{\alpha\beta}\le\beta$

iii. $\alpha\le\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\le\beta$ iv. $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha\beta}\le\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

Λύση:

i. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\alpha\le\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ και $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\le\beta$. Είναι :

- $\alpha\le\dfrac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow 2\alpha\le\alpha+\beta\Leftrightarrow\alpha\le\beta$, που ισχύει
- $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\le\beta\Leftrightarrow\alpha+\beta\le 2\beta\Leftrightarrow\alpha\le\beta$, που ισχύει

Πράγματι λοιπόν, έχουμε $\alpha\le\dfrac{\alpha+\beta}{2}\le\beta$

ii. Επειδή $\alpha\le\sqrt{\alpha\beta}\le\beta\overset{\alpha,\beta>0}{\Leftrightarrow}\alpha^2\le\alpha\beta\le\beta^2$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\alpha^2\le\alpha\beta$ και $\alpha\beta\le\beta^2$. Είναι:

- $\alpha^2\le\alpha\beta\Leftrightarrow\alpha^2-\alpha\beta\le 0\Leftrightarrow\alpha(\alpha-\beta)\le 0$, που ισχύει διότι $\alpha>0$ και $\alpha-\beta\le 0$
- $\alpha\beta\le\beta^2\Leftrightarrow\alpha\beta-\beta^2\le 0\Leftrightarrow\beta(\alpha-\beta)\le 0$, που ισχύει διότι $\beta>0$ και $\alpha-\beta\le 0$

Πράγματι λοιπόν, έχουμε $\alpha^2\le\alpha\beta\le\beta^2\Leftrightarrow\alpha\le\sqrt{\alpha\beta}\le\beta$

iii. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\alpha\le\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ και $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\le\beta$. Είναι:

- $\alpha\le\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\overset{\alpha+\beta>0}{\Leftrightarrow}\alpha(\alpha+\beta)\le 2\alpha\beta\Leftrightarrow\alpha^2+\alpha\beta\le 2\alpha\beta\Leftrightarrow\alpha^2\le\alpha\beta$, που ισχύει από (ii)
- $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\le\beta\overset{\alpha+\beta>0}{\Leftrightarrow}2\alpha\beta\le\beta(\alpha+\beta)\Leftrightarrow 2\alpha\beta\le\alpha\beta+\beta^2\Leftrightarrow\alpha\beta\le\beta^2$, που ισχύει από (ii)

Πράγματι λοιπόν, έχουμε $\alpha\le\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\le\beta$

iv. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha\beta}$ και $\sqrt{\alpha\beta}\le\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Είναι:

- $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha\beta}\overset{\alpha+\beta>0}{\Leftrightarrow}2\alpha\beta\le(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha\beta}\overset{\alpha\beta>0}{\Leftrightarrow}(2\alpha\beta)^2\le\left[(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha\beta}\right]^2\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 4\alpha^2\beta^2\le\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)\alpha\beta\overset{\alpha\beta>0}{\Leftrightarrow}4\alpha\beta\le\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 0\le\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\Leftrightarrow 0\le(\alpha-\beta)^2$, που ισχύει
- $\sqrt{\alpha\beta}\le\dfrac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha\beta}\le\alpha+\beta\overset{\alpha,\beta>0}{\Leftrightarrow}\left(2\sqrt{\alpha\beta}\right)^2\le(\alpha+\beta)^2\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 4\alpha\beta\le\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\Leftrightarrow 0\le\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\Leftrightarrow 0\le(\alpha-\beta)^2$, που ισχύει

Πράγματι λοιπόν, έχουμε $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha\beta}\le\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

19. i. Αν $x, y > 0$, να αποδείξετε ότι: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$

ii. Αν $x, y, z > 0$, να αποδείξετε ότι:

a. $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) \geq 4xy$

b. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}$

Λύση:

i. Είναι $x + y \geq 2\sqrt{xy} \overset{x,y>0}{\Leftrightarrow} (x+y)^2 \geq \left(2\sqrt{xy}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$, που ισχύει

ii. α. Σύμφωνα με το ερώτημα (i) είναι:

- $x^2+1 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 1} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2+1 \geq 2x$ (1)
- $y^2+1 \geq 2\sqrt{y^2 \cdot 1} \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y^2+1 \geq 2y$ (2)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) (αφού τα μέλη τους είναι θετικά), παίρνουμε:

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) \geq 4xy$$

b. Σύμφωνα με το ερώτημα (i) είναι:

- $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\frac{1}{\sqrt{xy}}$ (3)
- $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 2\sqrt{\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}} \Leftrightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 2\frac{1}{\sqrt{yz}}$ (4)
- $\frac{1}{x}+\frac{1}{z} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z}} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{z} \geq 2\frac{1}{\sqrt{xz}}$ (5)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (3), (4) και (5), παίρνουμε:

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 2\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

Α΄ Ομάδα

1. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$2\cdot\sqrt[10]{1024} - 3\cdot\sqrt[4]{81} + 5\cdot\sqrt[3]{125}$$

2. Αν $\alpha = 1 + 3\sqrt{2}$ και $\beta = 1 - 3\sqrt{2}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

a. $\alpha\beta$

b. $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$

c. $\alpha^3 + \beta^3$

3. i. Αν $x=\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}$, να βρείτε τον $\sqrt{x}$.

ii. Αν $x=\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}$, να βρείτε τον x^4 .

4. Να αποδείξετε ότι:

a. ο αριθμός $3+\sqrt{2}$ είναι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού $11+6\sqrt{2}$

b. ο αριθμός $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ είναι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού $\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$, όπου $\alpha,\beta\geq 0$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

a. $\sqrt{\dfrac{16}{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}}-\sqrt{\dfrac{16}{\left(3+2\sqrt{3}\right)^2}}$

b. $\sqrt[5]{32\left(3-\sqrt{5}\right)^5}$

c. $\sqrt[6]{\dfrac{64}{\left(1-\sqrt{2}\right)^6}}$

6. i. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\left(\sqrt{3}+1\right)^3 \text{ και } \left(\sqrt{3}-1\right)^3$$

ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$$

7. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=2\sqrt{2}$.

8. Να μετατρέψετε σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή την παράσταση:

$$\frac{1+3\sqrt{2}}{1-3\sqrt{2}}$$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

a. $2x^3+x=0$

b. $x^5-16x=0$

c. $\left(|x|-2\right)^4-81=0$

10. i. Να λύσετε την εξίσωση $x^3-25x^2=0$.

ii. Αν ρ είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (i), να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{\rho}+2}{\sqrt{\rho}-2}-\frac{\sqrt{\rho}-2}{\sqrt{\rho}+2}=\frac{8\sqrt{\rho}}{\rho-4}$$

11. i. Να λύσετε την εξίσωση $x^3+27=0$.

ii. Αν η εξίσωση $3(\alpha+1)^3x^2-8=0$ έχει κοινή λύση με την εξίσωση του ερωτήματος (i), να βρείτε το α.

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

a. $\sqrt{x^2-10x+25}=x-5$

b. $\sqrt{49-14x+x^2}=7-x$

13. Να αποδείξετε ότι:

a. $\left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}\right)\left(\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}\right)=\alpha+\beta$, όπου $\alpha,\beta\geq 0$

b. $\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)\left(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}\right)=\alpha-\beta$, όπου $\alpha,\beta\geq 0$

Β΄ Ομάδα

14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

a. $x^3=a^6$

b. $x^3=a^9$

c. $x^6=a^5$

15. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}-2$ είναι η κυβική ρίζα του αριθμού $14\sqrt{2}-20$.

16. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{2}}}$$

17. a. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{6+\sqrt{11}}$ και $\sqrt{6-\sqrt{11}}$.

b. Αν $\kappa=\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $\kappa^2=2$

ii. να βρείτε τα $\left(\kappa+\sqrt{2}\right)^{2008}$, $\left(\kappa-\sqrt{2}\right)^{2008}$

18. Να βρείτε τα x, y, για τα οποία ισχύει ότι $x^2+y^2-2x\sqrt{3}-2y\sqrt{5}+8=0$.

19. Αν $\mathrm{K}=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}$, να λύσετε:

a. την εξίσωση $\mathrm{K}=7$

b. την ανίσωση $\mathrm{K}\leq 7$

20. Να λυθούν οι εξισώσεις:

a. $x^5-x^3+27x^2-27=0$

b. $x^7+8x^4-81x^3=648$

21. Να λύσετε την ανίσωση $d\left(x^2,3\right)\le 1$.

22. Δίνεται η παράσταση $\Pi=\sqrt{\kappa+3}-2$, με $13\le\kappa\le 22$.

a. Να δείξετε ότι $2\le\Pi\le 3$.

b. Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η παράσταση Π λαμβάνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της.

23. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

a. $K=\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-10x+25}$

b. $\Lambda=\sqrt{x^4+4y^2}+\sqrt{y^4+4x^2}$, όταν $x^2+y^2=1$

24. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

a. $\sqrt{54+14\sqrt{5}}$

b. $\sqrt{15-4\sqrt{11}}$

c. $\sqrt{39-\sqrt{432}}$

25. Για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi=\dfrac{-2x-5+\sqrt{(3x-5)^2}}{2x}$ είναι ανεξάρτητη του x;

26. Να αποδείξετε ότι:

a. $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 2\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}$, όπου $x,y\ge 0$

b. $\sqrt{2006}+\sqrt{2007}+\sqrt{2009}+\sqrt{2010}\le 4\sqrt{2008}$

27. Να αποδείξετε ότι:

a. $\left|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right|\le\sqrt{|\alpha-\beta|}$, όπου $\alpha,\beta\ge 0$

b. $\sqrt[\nu+2]{\alpha^{\nu^2}}\cdot\sqrt[\nu+2]{\alpha^{4\nu}\alpha^4}=\alpha^{\nu+2}$, όπου $\alpha\ge 0$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ
ΣΑΜΑΡΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΚΩΣΤΑΚΗΣ ΛΑΜΠΡΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ