ΕΠΙΛΕΚΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΓΙΑ Β-ΛΥΚΕΙΟΥ

Οι προτάσεις που είναι γραμμένες με έντονα μαύρα γράμματα ***(Bold)*** *είναι θεωρήματα που δεν υπάρχουν στο τωρινό σχολικό βιβλίο. Αφού τα αποδείξετε μπορείτε μα τα χρησιμοποιήσετε σε οποιαδήποτε άσκηση. Ακόμη καλό είναι να ξέρετε ότι κάθε πολυώνυμο ν-βαθμού έχει ν-ρίζες αλλά όχι αναγκαστικά όλες πραγματικούς αριθμούς. Επίσης πρέπει να γνωρίζετε πολύ λίγα πράγματα από θεωρία αριθμών*

1 Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα P(x) : $P(x)P(x+1)=x^2+P(x)$ ☹

2 Αν τα πολυώνυμα P(x),Q(x) δεν έχουν κοινή ρίζα και $P^2(x)+Q^2(x)=R^2(x)$ τότε το R(x) δεν έχει πραγματικές ρίζες

3 Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης : P(x)**:**(x-α)(x-β), $\alpha\neq\beta$ συναρτήσει των α,β,P

4 Αν Π(x) το πηλίκο της διαίρεσης P(x)**:**(x-α)(x-β) με $\alpha\neq\beta$ τότε να βρείτε το υπόλοιπο της P(x)**:**x-(α+β) συναρτήσει των α,β,Π και P

5 Έστω Π_1 το πηλίκο της P(x)**:**(x-α) και Π_2 το πηλίκο της $\Pi_1(x)$**:**(x-α) τότε να δείξετε ότι το υπόλοιπο της P(x)**:**$(x-\alpha)^3$ είναι το : $\upsilon(x)=(x-\alpha)^2\Pi_2(\alpha)+(x-\alpha)\Pi_1(\alpha)+P(\alpha)$

6 Έστω A(x) ,B(x) ,φ(x) πολυώνυμα που δεν έχουν ρίζες και το A(φ(x)) είναι παράγοντας του B(φ(x)).Τότε να δείξετε ότι το A(x) είναι παράγοντας του B(x)

7 Βρείτε τα α,β ώστε το x^2-1 να είναι παράγοντας του $x^\nu+\alpha x+\beta$ ($\nu\in N^*$,ν>2)

8 Αν x^ν-1 είναι παράγοντας του x^μ-1 τότε ν είναι παράγοντας του μ ($\nu,\mu\in N^*$) ☹

9 Να δείξετε ότι $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του $\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^\nu+1$ Να βρεθεί και το πηλίκο

10 Αν το P(x) έχει παράγοντα το x^2+ax+1 τότε δείξτε ότι το P(x) έχει δυο ρίζες αντίστροφες . Να δείξετε ότι το $P(x)=x^5-55x+21$ έχει δυο ρίζες αντίστροφες ☹

11 Έστω ότι $0\neq|\alpha|\neq|b|\neq0$ και είναι :P(x)=(ax-b)Q(x)+v , P(x)=(bx-a)W(x)+v. Τότε να δείξετε ότι :1) ax-b παράγοντας του W(x) .2) bx-a παράγοντας του Q(x) και τελικά 3) x-1 παράγοντας του Q(x)+W(x)

12 Αν τα x-a , x-b είναι παράγοντες του P(x) δείξτε ότι το (x-a)(x-b) είναι και αυτό παράγοντας του P(x) Δίνεται ότι $a\neq b$

13 Αν οι διαιρέσεις του P(x) με τα C(x) , D(x) , C(x)D(x) δίνουν αντίστοιχα υπόλοιπα k(x) , l(x) , m(x) δείξτε ότι : το C(x) είναι παράγοντας του m(x)-k(x) και το D(x) είναι παράγοντας του πολυωνύμου m(x)-l(x) Έστω τώρα ότι ισχύουν : $P(x)=(x^2+x+1)A(x)+2x+3$ και $P(x)=(x^2-x+3)B(x)+3x+4$ Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x)**:**$(x^2+x+1)(x^2-x+3)$ ☹

14 Το P είναι 2ν βαθμού και ισχύει $P(x)+x^{2\nu}P(1/x)=0$..Να δείξετε ότι το x^2-1 είναι παράγοντας του P(x) και αν Π(x) το πηλίκο τότε δείξτε ότι η εξίσωση Π(x)=0 έχει ρίζες αντίστροφους αριθμούς ανά δύο

15 Να δείξετε ότι οποιοδήποτε πολυώνυμο P(x) γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό την μορφή :$P(x)= P(\mu)+A_1(x-\mu)+...+A_\nu(x-\mu)^\nu$. ☹

16 Αν P(x)=P(1-x) να δείξετε ότι 1)Το P είναι αρτίου βαθμού 2)η διαίρεση του P(x) με το $x-x^2$ αφήνει σταθερό υπόλοιπο 3) Το πολυώνυμο P(x) γράφεται στην μορφή : $P(x)=a_n(x-x^2)^n + . . . +a_1(x-x^2)+a_0$ ☹

17 Στα παρακάτω θέματα δεχόμαστε ότι :**αν ένα πολυώνυμο P έχει μια τουλάχιστον ρίζα παραπάνω από τον βαθμό του τότε είναι το μηδενικό πολυώνυμο**

Α)Αν H(x) πολυώνυμο ν βαθμού για το οποίο ισχύουν :$H(x_1)=H(x_2)= . . . =H(x_\nu)=H(x_{\nu+1})=\lambda$ τότε να δείξετε ότι $H(x)=\lambda \ \forall x \in R$

Β) Αν Q(x) πολυώνυμο : Q(x)=Q(x-1) τότε $Q(x)=Q(0) \ \forall x \in R$

Γ) Βρείτε την μορφή όλων των πολυωνύμων R(x): $(x-3)R(x)=xR(x-1) \ \forall x \in R$ ☹☹

Δ) Έστω $\alpha_1,\alpha_2, . . . ,\alpha_n$ διαφορετικοί μεταξύ τους αριθμοί Αν $x-a_k$, k=1,2,...,n είναι όλοι παράγοντες ενός πολυωνύμου P(x) τότε δείξτε ότι και το γινόμενο $(x-a_1)(x-a_2) . . . (x-a_n)$ είναι και αυτό παράγοντας του P(x) ☹

Ε) Αν η διαίρεση $P(x):(x-a_1)(x-a_2) . . . (x-a_n)$ αφήνει υπόλοιπο τον αριθμό υ τότε να δείξετε ότι καθεμία από τις διαιρέσεις $P(x):(x-a_K)$, k=1,2,...,n αφήνει το ίδιο υπόλοιπο υ

ΣΤ) Δείξτε το αντίστροφο της προηγουμένης πρότασης ☹

18 Αν $Q(x)+Q(x+\alpha)=0 \ \forall x \in R, \alpha \in R^*$ τότε Q(x)=0 για κάθε τιμή του x στο R Αν τώρα $P(x)+P(x+\alpha)=2x^\nu \ \ \forall x \in R, \alpha \in R^*$ τότε δείξτε ότι $P(\alpha-x)=(-1)^\nu P(x)$ και αν ν περιττός τότε παράγοντας του P είναι το 2x-α, ενώ αν ν άρτιος παράγοντας του P είναι το x(x-α) ☹☹

19 Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τα P(x) , Π(x) βαθμών ν,μ αντίστοιχα να έχουν κοινή ρίζα είναι :να υπάρχουν δυό πολυώνυμα A(x),B(x) βαθμών ν-1 και μ-1 αντιστοίχως ώστε : P(x)B(x)-Π(x)A(x)=0 (ν,μ>1) ☹☹

20 Στο επόμενο θέμα χρησιμοποιούμε τις σχάσεις ριζών – συντελεστών ενός πολυωνύμου αφού τις αποδείξουμε στο Α) ερώτημα

Α) Έστω r_1,r_2,r_3 οι ρίζες του $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,$a \neq 0$. Να δείξετε ότι : $r_1+r_2+r_3=-b/a$, $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=c/a$, $r_1r_2r_3=d/a$ (Σχέσεις Vietta)

Β) Έστω $Q(x)=x^3-x^2-4x-4$ Δείξτε ότι κάθε ρίζα του Q είναι θετικός αριθμός και ότι δεν μπορεί όλες οι ρίζες του Q να είναι πραγματικές ☹

Γ) Αν $R(x)=x^3-x-1$ με ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3 δείξτε ότι : $(\rho_1-\rho_2)^2=1-3\rho_1\rho_2$ και έτσι να συμπεράνετε ότι το πολυώνυμο δεν μπορεί να έχει όλες του τις ρίζες πραγματικούς αριθμούς ☹

Δ) Αν $W(x)=x^3+ax+b$ με ρίζες $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$ τότε δείξτε ότι : $(\kappa_1-\kappa_2)^2=-(\alpha+3\kappa_1\kappa_2)$ Αν τώρα ισχύει : $4\alpha^3+27b^2>0$ τότε δεν μπορεί όλες οι ρίζες του W να είναι πραγματικές . Αν όμως $4\alpha^3+27b^2=0$ τότε το W έχει τουλάχιστον δυο ίσες ρίζες. Βρείτε ακόμη σε ποια περίπτωση το W θα έχει και τις τρεις ρίζες του ίσες. ☹

21 Αν το πολυώνυμο P με ακεραίους συντελεστές έχει για ρίζα ρ τον ρητό αριθμό ρ=κ/λ όπου κ, λ ακέραιοι που δεν έχουν κοινό διαιρέτη τότε δείξτε ότι το κ διαιρεί τον σταθερό και το λ διαιρεί τον μεγιστοβάθμιο συντελεστή του P

22 Να βρείτε για ποιες τιμές του ακεραίου α το $P(x)=x^3-(a+1)x+2a$ έχει ρίζες ρητούς αριθμούς ☹

23 Αν το P(x) έχει ακέραιους συντελεστές και οι αριθμοί P(0),P(1) είναι και οι δύο περιττοί να δείξετε ότι το P(x) δεν έχει ακεραία ρίζα ☹

24 Έστω α>β>γ ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο P(x) με ακέραιους συντελεστές ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι παρακάτω σχέσεις P(α)=β , P(β)=γ , P(γ)=α ☹☹

25 Να αποδείξετε ότι αν α ακέραια ρίζα του P(x) τότε ο αριθμός a-m διαιρεί τον αριθμό P(m) όπου το πολυώνυμο P(x) έχει ακέραιους συντελεστές και m ακέραιος

26 Να αποδείξετε ότι αν ρ ρητή ρίζα του P(x) με ρ=κ/λ όπου κ, λ ακέραιοι που δεν έχουν κοινό διαιρέτη τότε ο αριθμός κ-λm διαιρεί τον αριθμό P(m). Θεωρείστε ότι το πολυώνυμο P(x) έχει ακέραιους συντελεστές και m ακέραιος

27 Αν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ διακεκριμένοι ακέραιοι τότε να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\nu)-1$ δεν γράφεται υπό την μορφή P(x)=A(x)B(x) όπου τα A,B πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές και τουλάχιστον πρώτου βαθμού ☹☹

28 Έστω πολυώνυμο P(x)με ακέραιους συντελεστές ώστε P(0)=P(1)=1 Να δείξετε ότι P(x)=x(x-1)Π(x)+1 και αν x_0 ακέραιος και $x_{\nu+1}=P(x_\nu)$ τότε να δείξετε ότι ο $x_{\nu+1}$ δεν διαιρεί κανέναν από τους $x_0,x_1,\ldots,x_\nu$ ☹☹

29 Έστω $P(\chi)=\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\chi+\alpha_0$ Αν ρ ρίζα του P(χ) τότε να δείξετε ότι $|\rho|\leq 1+|a_{\nu-1}|+\ldots+|a_0|$ ☹☹

30 Έστω ότι : $p_n(x)-p_n(x-1)=x^n$,nεN* και $p_n(0)=0$ τότε
α) Βρείτε τον βαθμό των p_n
β) Δείξτε ότι : για κάθε φυσικό ρ είναι $p_n(\rho)=1^n+2^n+\ldots+\rho^n$ ☹

31 Έστω ότι : $p_n(x)=(x-n)p_{n-1}(x)$ nεN* και $p_0(x)=1$ τότε
α) Βρείτε τον βαθμό των p_n
β) Υπολογίστε τον σταθερό και τον μεγιστοβάθμιο συντελεστή των $p_n(x)$
γ) Βρείτε τις ρίζες των $p_n(x)$
δ) Βρείτε τον τύπο των $p_n(x)$ ☹☹