

ΘΕΜΑ Β1

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$

για την οποία ισχύει :

$$\checkmark f(e) = e^2$$

$$\checkmark f'(x) \cdot x - 2f(x) = x^2, \text{ για κάθε } x > 0$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι : $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

Μονάδες 7

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

Μονάδες 8

B3. Να σχεδιάσετε μια «πρόχειρη» γραφική παράσταση της f

Μονάδες 5

B4. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης : $x = e^{\frac{a}{x^2}}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β2

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει :

$$x \cdot f(x) + 3\eta\mu x = x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x - \frac{3\eta\mu x}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ -3 & , \text{αν } x=0 \end{cases}$.

B2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

B3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{-x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα .

ΘΕΜΑ Γ1

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με σύνολο τιμών το \mathbf{R} η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = 2x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$

Γ1. Να βρείτε τις ρίζες της f και το πρόσημο της.

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x) = \frac{x^3 + x}{2}$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Γ3. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $\varepsilon : y = x$.

ΘΕΜΑ Γ2

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο :

$$f(x) = |3x + a \sin x - 2 \eta \mu x| \quad (\text{για κάποιο } a \in \mathbb{R})$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $a = -1$

Μονάδες 7

Γ3. Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς την απόλυτη τιμή και να χαράξετε μια «πρόχειρη» γραφική παράσταση της f

Μονάδες 8

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση κάθε οριζόντιας εφαπτομένης της C_f

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) = x^6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(-2) < 0 < f(2)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

α) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(a, f(a))$ με $a \neq 0$ έχει με τη C_f και άλλο κοινό σημείο, το N .

β) η κλίση της C_f στο σημείο N είναι τετραπλάσια της κλίσης της C_f στο M

Μονάδες 3+2=5

Γ4. Ένα σημείο $\Sigma(x, y)$ με $x > 0$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ και έστω A η προβολή του Σ στον άξονα $x'x$. Το σημείο A απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ με ρυθμό 1 cm/s . Τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του Σ είναι 2 να βρείτε το ρυθμό μεταβολής.

α) της απόστασης $A\Sigma$

β) της γωνίας $\Sigma O A$

Μονάδες 3+5=8

ΘΕΜΑ Δ1

Έστω συνάρτηση $f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbf{R}$, δις παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν :

- $f''(x) = e^{2f(x)} + e^{f(x)}$, για κάθε $x \in (-\infty, 0]$
- $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0]$
- η ευθεία $y = 2x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $O(0, f(0))$

Δ1. Να δείξετε ότι $e^{-f(x)} f'(x) = 1 + e^{-f(x)}$ και στη συνέχεια ότι : $f(x) = -\ln(2e^{-x} - 1)$, $x \leq 0$

Μονάδες 9

Δ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται , να βρείτε την f^{-1} και στη συνέχεια να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της C_f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = x$, για κάθε $x \leq 0$

Μονάδες 10

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 1 - \sin x$ για $x \leq 0$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ2

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \cdot \ln(f(x)) + 2x \cdot f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)
- $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $f(1) = e$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln^2 x - x$

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(e^{-x} x^{\ln x}) + 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση: $f(3^x) + f(4^x) > f(5^x)$

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2) = f(2^x)$

ΘΕΜΑ Δ3

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν :

- $f''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 - f'(x)$, για κάθε $x > 0$.
- $f(1) = \frac{e+1}{e}$
- $e(1 - f(x)) \leq x - 2$, για κάθε $x > 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι : $f'(1) = -\frac{1}{e}$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = -\ln x + x + e^{-x}$, $x > 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε σημείο $x_0 \in (0, 2)$ για το οποίο ισχύει $f(x_0) > 1$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχει μοναδικό $x_1 < x_0$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = f(2)$

Μονάδες 5

β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) - f(2) = f'(\xi)$.

Μονάδες 5