

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ- ΑΚΡΟΤΑΤΑ)

1] α) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις:

$$\text{i) } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 3 \quad \text{ii) } g(x) = x^4 - 2x^2 + 2 \quad \text{iii) } h(x) = x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$

β) Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών των εξισώσεων:

$$\text{i) } \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 3 = 0 \quad \text{ii) } x^4 - 2x^2 + 2 = 0 \quad \text{iii) } x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

2] Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις:

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases} \quad \text{ii) } g(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x < 0 \\ 2x^2 - 3x, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{iii) } h(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x > -1 \\ -x^2 - 4x + 2, & x \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{iv) } t(x) = |x^2 - 3x + 2|$$

3] Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις:

$$\text{i) } f(x) = e^x - x - 1 \quad \text{ii) } f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x - 1)^2} \quad \text{iii) } f(x) = \frac{3x - 2}{x - 1} + \ln x^2 \quad \text{iv) } f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

4] Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 3x^3 - ax^2 + bx - 3$  όπου  $a, b \in \mathbf{R}$ . Αν η  $f$  έχει τοπικά ακρότατα στο  $x_1 = 1$  και στο  $x_2 = -5/9$  να βρεθούν οι αριθμοί  $a, b$  και να καθοριστεί το είδος των ακροτάτων.

5] Να δείξει ότι αν η συνάρτηση  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  παρουσιάζει ακρότατα σε τρία διακεκριμένα σημεία τότε:  $3b^2 - 8ac > 0$

6] Ένας αγρότης έχει συρματόπλεγμα 100m και θέλει να περιφράξει ένα χώρο σχήματος ορθογωνίου του οποίου η μία πλευρά είναι ο τοίχος του αγροκτήματός του. Ποιές πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε το ορθογώνιο να έχει μέγιστο εμβαδόν;



7] Από ένα σημείο P της υποτεινουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου

φέρνουμε κάθετες προς τις κάθετες πλευρές του.

Τι θέση πρέπει να έχει το P για να είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται μέγιστο;

Να βρεθεί ο λόγος μεταξύ των εμβαδών τριγώνου και του μεγίστου ορθογωνίου.

8] Έστω η συνάρτηση  $f(x)=a\ln(x^4-3x^2+2)+x^2+bx$ . Να βρεθούν οι παράμετροι  $a, b$

ώστε η  $f$  να έχει στην αρχή των αξόνων τοπικό μέγιστο το  $\ln 14$ , και να βρεθεί το είδος του ακροτάτου.

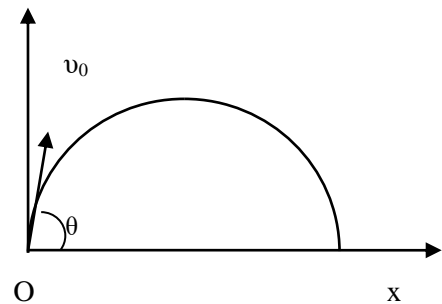
9] Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=\frac{2x^2-3bx+1}{x^2-3bx+2}$  Να βρεθεί το  $b$  ώστε η  $f$  να μην έχει ακρότατα.

10] Το βεληνεκές δηλαδή η οριζόντια απόσταση που

διατρέχει ένα βλήμα μέχρι να επιστρέψει στο οριζόντιο

επίπεδο εκτόξευσης δίνεται από την σχέση:  $s(\theta)=\frac{v_0^2 \eta \mu 2\theta}{g}$

όπου  $v_0$  είναι η αρχική ταχύτητα,  $\theta$  η γωνία εκτόξευσης και  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας. Με ποια γωνία πρέπει να εκτοξευτεί το βλήμα να έχει μέγιστο βεληνεκές;



11] α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση:  $f(x)=\sin x - 1 + \frac{x^2}{2}$

β) Να αποδειχτεί ότι:  $2\sin x > 2-x$

12] Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση:  $f(x)=\frac{(x+a)^2}{x+3}$

13] Να βρεθούν τα  $x, y$  τέτοια ώστε  $x+y=13$  και  $3\sqrt{x}+2\sqrt{y}$  να είναι μέγιστο.

14] Το συνολικό κόστος παραγωγής  $x$  συσκευών σε μία μέρα είναι

$$x^2 + 35x + 25 \text{ και η τιμή πώλησης κάθε συσκευής } 50 - \frac{1}{2}x.$$

α) Ποιά πρέπει να είναι η ημερήσια παραγωγή ώστε να έχουμε μέγιστο συνολικό κέρδος;

β) Να δειχτεί ότι το συνολικό κόστος παραγωγής κάθε συσκευής έχει τοπικό ελάχιστο.

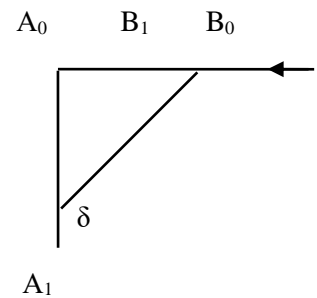
15] Στις 9π.μ ένα πλοίο B ήταν 65km ανατολικά ενός πλοίου A.

Το πλοίο B πλέει δυτικά με σταθερή ταχύτητα 10km/h και το

A νότια με 15km/h. Αν τα πλοία συνεχίσουν να πλέουν

με τις ίδιες ταχύτητες και στις ίδιες πορείες, τότε θα βρεθούν

στην ελάχιστη απόσταση  $\delta$  μεταξύ τους και πόσο κοντά;



16] Ένα φάρμακο για την υπόταση υπάρχει σε δισκία και υπόθετα. Η μεταβολή της πίεσης

συναρτήσε του χρόνου  $t$ , με την χορήγηση δισκίων είναι  $\Pi(t_1) = te^{-t}$  και με

την χορήγηση υπόθετων  $\Pi(t_2) = t^2e^{-t}$ . Ποιά από τις δύο μορφές του φαρμάκου δίνει την

μεγαλύτερη πίεση και ποιά φέρνει το αποτέλεσμα αυτό πιο σύντομα;

17] Να προσδιοριστεί το  $a \in \mathbf{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$

να παρουσιάζει ακρότατο στο  $\pi/6$ .

18] Να αποδειχτεί ότι αν για μία συνάρτηση  $f$  που είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  ισχύει:

$$4[f(x)]^5 + 20f(x) = x^5 + 4x + 4, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{ τότε η } f \text{ δεν έχει ακρότατα στο } \mathbf{R}.$$