

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ Γ ΚΑΤ. ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΝΕΑ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ 2020

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x < 1 \\ x^2 - 2x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$

- Α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών .
Β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
Γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

ΘΕΜΑ 2^ο

Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ, ύψους x cm, είναι εγγεγραμμένο σε τρίγωνο ΑΒΓ βάσης ΒΓ=12cm και ύψους ΑΔ=20 cm .

Α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ΚΛΜΝ είναι $E(x) = \frac{-3x^2 + 60x}{5}$, $0 < x < 20$

Β) Για ποιά τιμή του x το $E(x)$ γίνεται μέγιστο και ποιά είναι το μέγιστο εμβαδόν ;

Γ) Θεωρούμε επιπλέον ένα κινητό Μ που ξεκινά από το σημείο Α(10,60) και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=E(x)$, $x \in (0,10)$. Σε ποιά σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του Μ είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του, αν υποθεθεί ότι $x'(t) < 0$, $t \geq 0$.

Δ) Να υπολογισθεί το όριο : $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\ln \frac{1}{10-|x|}}{E(x)-60}$

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω συνεχής $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=2$ που ικανοποιεί τη σχέση : $f(f(x))+4f(x)=6-x^4$

Α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$

Β) Να αποδείξετε ότι $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=0$

Γ) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 4f(x) - 5}{x-1} = -4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$.

Δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x))+1=0$, έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Ν.ΠΕΤΡΟΧΕΙΛΟΥ