ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α)** Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

β) Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f και D_g αντίστοιχα και ορίζεται η σύνθεση fog , ποιο είναι το πεδίο ορισμού της fog;

γ) Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σ'ένα κλειστό διάστημα [α, β]

<ΜΟΝΑΔΕΣ 7>

Β. Δίνεται μια συνάρτηση f: A→R

Α) Πότε η f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα στο A;

Β) Πότε λέμε ότι η f είναι 1-1;

Γ) Πότε η f έχει αντίστροφη και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1};

Δ) Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano <ΜΟΝΑΔΕΣ 8>

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές(Σ) ή λανθασμένες (Λ)

Α) Υπάρχει συνάρτηση που για κάποιο α∈R η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία x=α τουλάχιστον δύο φορές

Β) Αν f: A→R τότε το σύνολο των τιμών της f είναι το σύνολο f(A)=$\{y\epsilon R / \ y = f(x) \ \text{για} \ x\epsilon A\}$

Γ) Ισχύει fog = gof

Δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 τότε η σύνθεση gof είναι συνεχής στο x_0

Ε) Αν μια συνάρτηση f: A→R είναι γνησίως μονότονη τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A

ΣΤ) Αν για μια συνάρτηση f: A→R ισχύει η σχέση f(α)=f(β) ⇔ α=β για κάθε α,βϵR τότε η f είναι 1-1

Ζ) Αν η συνάρτηση f: A→R είναι 1-1 τότε οι εξισώσεις $f(x) = \chi$ και $f^{-1}(\chi) = \chi$ είναι ισοδύναμες

Η) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα Δ1 και Δ2 τότε είναι γνησίως αύξουσα στο Δ1∪Δ2 .

Θ) Αν οι συναρτήσεις f , g εχουν όριο στο χ_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο χ_0 τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x)$

Ι) Ισχύει $\lim_{x\to x_0}\big(f(x) + g(\chi)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$ σε κάθε περίπτωση

<ΜΟΝΑΔΕΣ 10>

ΘΕΜΑ 2^{0}

Α. **α)** Έστω μια συνάρτηση f: A→R . Πότε λέμε οτι η f παρουσιάζει στο $\chi_0 \epsilon A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο; <ΜΟΝΑΔΕΣ 2>

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και χ_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο χ_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$ <ΜΟΝΑΔΕΣ 5>

Β. **α)** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής και να γράψετε την γεωμετρική ερμηνεία

β) Να δώσετε ορισμό του σημείου καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f

γ) Πότε λέμε οτι η ευθεία με εξίσωση y=λχ +β είναι πλάγια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f

<ΜΟΝΑΔΕΣ 9>

Γ. Να αποδείξετε ότι :

α) $\ln(|\chi|)' = \frac{1}{\chi}$ για κάθε $\chi \neq 0$

β) $(\chi^{\nu})' = \nu\chi^{\nu-1}$, $\nu \epsilon N - \{0,1\}$

γ) $(\chi^{\alpha})' = \alpha\chi^{\alpha-1}$, $\alpha \epsilon R-Z$, $\chi \epsilon (0, +\infty)$

<ΜΟΝΑΔΕΣ 9>

ΘΕΜΑ 3ο

Να χαρακτηρίσετε ως σωστή(Σ) ή λάθος(Λ) κάθε μια απο τις επόμενες προτάσεις :

1. Αν η παραγωγίσιμη f: A→R ειναι γνησίως αύξουσα τότε f'(x)>0 για κάθε χ∈R
2. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχης σε ένα διάστημα Δ και f'(χ)≠0 σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι 1-1
3. Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε $\chi_0 \in \Delta$ είναι κάτω απο την C_f
4. Αν η f είναι κυρτή τότε είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της
5. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει f'(x) = 0 για κάθε $\chi \in R^*$ τότε η f είναι σταθερη στο R^*
6. Η συνάρτηση f(x) = $\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο χ=0
7. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει f(α)=f(β) με α<β τότε ορίζεται η $\frac{1}{f'(\chi)}$ στο [α,β]
8. Αν το $A(\chi_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο χ_0 τότε $f''(x_0)=0$
9. Αν το $A(\chi_0,f(\chi_0))$ είναι τοπικό ακρότατο της συνάρτησης f τότε η f είναι σίγουρα παραγωγίσιμη στο χ_0
10. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0)=0$ στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της τότε κατ' ανάγκη έχει τοπικό ακρότατο στο χ_0
11. Ανάμεσα σε δύο ρίζες μίας πολυωνιμκής συνάρτησης υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της
12. Αν μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο Δ έχει f'(x)<0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι 1-1
13. Αν $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$ τότε η f στο χ=1 έχει τοπικό μέγιστο
14. Ισχύει $(\ln|\chi|)' = \frac{1}{|\chi|}$ για κάθε χ ∈ R
15. Αν μια συνάρτηση f ορίζεται στο χ_0, είναι συνεχής στο χ_0 και έχει τοπικό ακρότατο στο χ_0 τότε είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και μάλιστα ισχύει $f'(x_0)=0$
16. Αν μια συνάρτηση f είναι $\chi_0 \in A_f$ και ισχύει :
    $\lim_{\chi \to x_0^-}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = \lim_{\chi \to x_0^+}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$ τότε είναι παραγωγίσιμη στο χ_0
17. Μια συνάρτηση f συνεχής σε κλειστό διάστημα [α,β] δεν έχει ασύμπτωτες
18. Έστω μια συνάρτηση f συνεχης σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν μια f κυρτή στο Δ τότε f''(x)>0 για κάθε εσωτερικο σημείο του Δ.
19. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ. Στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο η γραφική της παράσταση έχει οριζόντια εφαπτομένη
20. Αν μια συνάρτηση f ορίζεται και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) και το $A(\chi_0,f(\chi_0))$ με $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f τότε $f''(x_0)=0$
21. Οι πολυωνιμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλυτέρου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτη

22. Αν για την συνεχή και δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f: R→R ισχύει $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής

23. Δίνεται η συνεχής f: [α,β]→R με $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο β, το f(β)

24. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο (0,+∞) με $\lim_{x\to\infty} f(x)=5$

Ποια απο τις παρακάτω προτάσεις δεν είναι κατ'ανάγκη σωστή :

i. Η y=5 είναι ασύμπτωτη της C_f στο +∞

ii. f(x)>0 για κάθε χ>0

iii. $\lim_{\chi\to+\infty}[f(x)-4]=1$

25. Αν f παραγωγίσιμη στο R με f'(0)=0 και f' γνησίως φθίνουσα στο R τότε f(0) είναι:

i. Τοπικό μέγιστο της f

ii. Τοπικό ελάχιστο της f

iii. Δεν είναι ακρότατο της f <ΜΟΝΑΔΕΣ 25>

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Έστω f είναι μια συνεχής συνάρτηση σ΄ένα διάστημα [α,β] .Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β] ,τότε ,να δείξετε ότι : $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$

<Μονάδες 7>

Β.α) Τι ονομάζουμε παράγουσα της f στο Δ.

β) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ΄ένα διάστημα [α,β] .Αν f(x) ≥0 ,για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν ποιό είναι το πρόσημο του $\int_\alpha^\beta f(x)dx$

<Μονάδες 8>

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές(Σ) ή λανθασμένες (Λ)

Α. Ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{dx} \geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0$

Β. Κάθε συνεχής συνάρτηση σ΄ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο Δ.

Γ. Όλες οι αρχικές της f στο διάστημα Δ έχουν παράλληλες εφαπτομένες στο $x_0\in\Delta$

Δ. Αν F ,G παράγουσες της f στο Δ , τότε οι F και G είναι ίσες.

<Μονάδες 10>

καλή επιτυχία