

## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}, \quad B = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

i) Να αποδείξετε ότι :  $A=4$  και  $B=1$

ii) Να επιλυθεί η εξίσωση :  $(x-1)^3 = -2A$

iii) Να επιλυθεί η εξίσωση :  $|x-2|=B$

iv) Να επιλυθεί η ανίσωση :  $|x| > A+B$

2. Δίνεται η εξίσωση :  $2x^2 - (\lambda+2)x + \lambda = 0$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθούν οι τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει:  
 $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 < 2$

iii) Να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες  $\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}$ .

3. Α) Να λύσετε την ανίσωση :  $|\frac{x+2}{3} - 3| > 2$

Β) Να λύσετε την ανίσωση :  $\frac{|x-1|-1}{6} + \frac{2|1-x|+3}{4} \geq |x-1|$

Γ) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{3 - |x-1|}$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$

Β) Υπολογίστε το  $f(0)$

Γ) Υπολογίστε την παράσταση  $x_0 = \frac{12}{2-f(0)} - 6f(0) - 1$

Δ) Αν  $x_0 = 1$ , να βρείτε την τιμή του  $y_0$  ώστε το σημείο  $M(x_0, y_0)$ , να ανήκει στην γραφική παράσταση της  $f$ .

5. Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \sqrt{\frac{3-|x-1|}{|2x-1|-3}}$

Α) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων  $|x-1| \leq 3$  και  $|2x+1| > 3$

Β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f$

6. Δίνεται η εξίσωση :  $2x^2-(\lambda-2)x-\lambda^2=0$  (1)

A) Να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$

B) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι δύο πραγματικές και άνισες ρίζες με  $-1 < x_1+x_2 < 3$ , τότε δείξτε :  $0 < \lambda < 8$

7. Δίνεται η εξίσωση :  $x^2+(\lambda+1)x+\lambda=0$  (1), όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$

A) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$

B) Να βρεθεί ο  $\lambda$ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα και στη συνέχεια να βρεθεί αυτή.

Γ) Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της (1), να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες ισχύει:  $|(-x_1+1)(-x_2+1)| < 3$

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=(k-1)x^2-2(k-3)x-k+3$ , με  $k \neq 1$ .

A) Να βρείτε για ποιές τιμές του  $k \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει 2 ρίζες πραγματικές.

B) Να βρείτε για ποιές τιμές του  $k \in \mathbb{R}$ , ισχύει  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Γ) Για  $k=0$ , να λυθεί η ανίσωση:  $f(x) \geq f(1)$

Δ) Να απλοποιηθεί η παράσταση  $A=|x-1|+|x+4|-|x-5|$ , αν το  $x$  παίρνει τιμές στο διάστημα που αποτελεί λύση της ανίσωσης του ερωτήματος Γ.

9. A) Να βρεθεί ο  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ώστε η εξίσωση  $|\alpha^2x^2+3\alpha x-4|+|x+\alpha^2|=0$  να έχει λύση την  $x=1$ .

B) Για την τιμή του  $\alpha$  που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα να λύσετε την εξίσωση :

$$2x^2+(\sqrt{5}-\alpha)x+\frac{\sqrt{5}}{2}=0$$

Γ) Αν  $\beta$  είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης στο ερώτημα B να λύσετε την εξίσωση :

$$\lambda^2(x-1)=\lambda^3-2\lambda^2+9x+12\lambda\beta, \text{ για τις διάφορες τιμές του } \lambda \in \mathbb{R}.$$

10. Δίνεται η παράσταση  $K=\frac{3x^2-12x}{x^2+2x}$

A) Πότε ορίζεται το  $K$  ;

B) Να απλοποιηθεί το  $K$

Γ) Να λυθεί η εξίσωση :  $K=-1$

Δ) Να λυθεί η εξίσωση :  $|K|=3$

