16 Αυγούστου

Ε΄ Έκδοση

2013

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ

Διανύσματα Β΄ Λυκείου
Μαθηματικά Κατεύθυνσης

25 Μεθοδολογίες, 11 λυμένα παραδείγματα, τύποι, ιδιότητες και 12 λυμένες βασικές ασκήσεις

Επιμέλεια: Χατζόπουλος Μάκης

Σχολικό έτος 2013 – 14

http://lisari.blogspot.com

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. ***«Σπάσιμο» διανυσμάτων:*** Όταν έχουμε ένα διάνυσμα $\vec{AB}$ τότε μπορούμε να το αναλύσουμε ως εξής:

- $\vec{AB}=\vec{AK}+\vec{KB}$, δηλαδή **παρεμβάλουμε το σημείο Κ** ανάμεσα από την αρχή και το πέρας. Αυτό γίνεται και με περισσότερα σημεία όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Σχηματική ερμηνεία:

$$\vec{AB} \overset{\nearrow\Gamma\searrow}{=} \vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma B}$$

$$\vec{AB} \overset{\nearrow\Delta\searrow}{=} \vec{A\Delta}+\vec{\Delta B}$$

$$\vec{AB} \overset{\nearrow\Gamma,\Delta\searrow}{=} \vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}+\vec{\Delta B}$$

- $\vec{AB}=$ (διανυσματική ακτίνα πέρατος) – (διανυσματική ακτίνα αρχής) $=\vec{OB}-\vec{OA}$

με **σημείο αναφοράς** το σημείο Ο.

*Η **επιλογή του σημείου** (ή σημείων) αναφοράς που παρεμβάλλουμε, πρέπει να είναι κατάλληλο κάθε φορά. Κυρίως επιλέγουμε μια κορυφή τριγώνου, τετραπλεύρου κτλ, γενικότερα ένα σταθερό και γνωστό σημείο από τα δεδομένα της άσκησης. Συνήθως το σημείο που υπάρχει στις περισσότερες σχέσεις, είναι γνωστό και σταθερό, σε αυτό αναλύουμε όλα τα διανύσματα.*

***Προσοχή**, το διάνυσμα το γράφουμε ως **μια από τις δύο μορφές** (είναι οι ισοδύναμες).*

2. Όταν έχουμε διάνυσμα με ίδια άκρα τότε λέγεται **μηδενικό** διάνυσμα, δηλαδή $\boxed{\vec{AA}=\vec{0}}$.

3. Όταν αλλάζουμε θέση άκρων σε ένα διάνυσμα, τότε παίρνουμε το **αντίθετο διάνυσμα**, δηλαδή

$$\vec{AB}=-\vec{BA} \quad \text{και} \quad -\vec{AB}=\vec{BA}$$

4. **Πρόσθεση διανυσμάτων**

Α. Με κοινή αρχή

Αν θέλουμε να προσθέσουμε δύο διανύσματα **με κοινή αρχή** κάνουμε τα εξής:

α) Μέθοδος του παραλληλογράμμου, δηλαδή το άθροισμα των δύο διανυσμάτων ισούται με την διαγώνιο του παραλληλογράμμου, αυτόν τον τρόπο ακολουθούμε όταν έχουμε συνήθως σχήμα.

β) Διανυσματική ακτίνα μέσου, από τον τύπο:

$$\vec{OA}+\vec{OB}=(\text{κοινή αρχή το O})=2\cdot\vec{OM},\ \text{όπου M το μέσο του AB}$$
$$\text{και}\ \vec{AO}+\vec{BO}=(\text{κοινό πέρας το O})=2\cdot\vec{MO},\ \text{όπου M το μέσο του AB}$$

Αυτόν τον τρόπο τον εφαρμόζουμε όταν γνωρίζουμε το **μέσο** ενός διανύσματος ή μπορούμε εύκολα να το βρούμε.

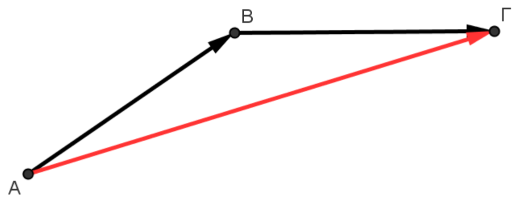
γ) <u>Συντεταγμένες διανύσματος</u> , αφού στις συντεταγμένες διανύσματος έχουμε κοινή κορυφή το O ο τύπος είναι

$$\vec{OA}+\vec{OB}=(x_A,y_A)+(x_B,y_B)=(x_A+x_B,y_A+y_B),\ \text{όπου}\ \vec{OA}=(x_A,y_A),\quad \vec{OB}=(x_B,y_B)$$

<u>Β. Διαδοχικά διανύσματα</u>

Για να **προσθέσουμε δύο διανύσματα**, μπορούμε και ως εξής:

α) Τα κάνουμε διαδοχικά, δηλαδή το πέρας του ενός διανύσματος το τοποθετούμε στην αρχή του άλλου διανύσματος, άρα το άθροισμά τους είναι η αρχή του πρώτου διανύσματος και πέρας, το πέρας του δεύτερου διανύσματος.



Το παραπάνω το ακολουθούμε όταν έχουμε σχήμα, αν **δεν** έχουμε πράττουμε τα παρακάτω.

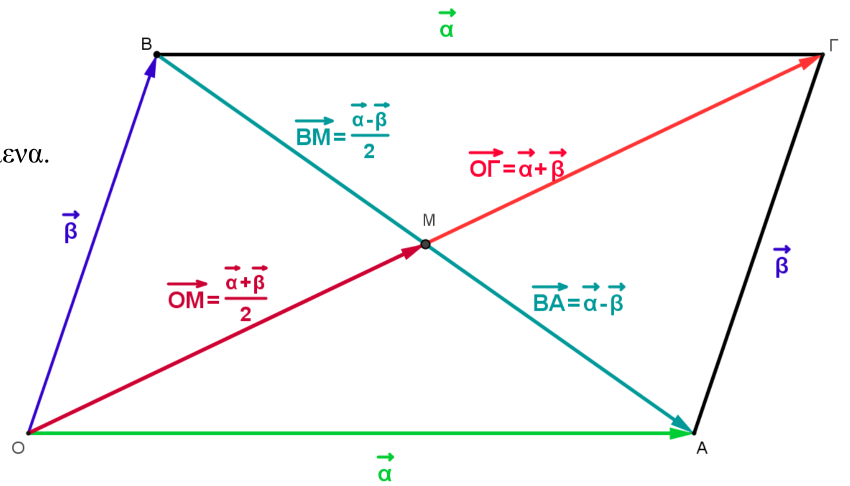
β) Όταν έχουμε πρόσθεση διανυσμάτων που το πέρας του ενός είναι η αρχή του άλλου, τότε ισούται με το διάνυσμα που προκύπτει αν διαγράψουμε τα σημεία αυτά. Δηλαδή,

$$\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}$$
$$\vec{AB}+\vec{\Gamma A}=\text{αντιμεταθετική ιδιότητα}=\vec{\Gamma A}+\vec{AB}=\vec{\Gamma B}$$
$$\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=\text{πρόσθεση με κοινή αρχή, δες παραπάνω (α)}$$
$$\vec{BA}+\vec{\Gamma A}=-\left(\vec{AB}+\vec{A\Gamma}\right)\text{πρόσθεση με κοινό πέρας, δες παραπάνω}$$

***<u>Σχηματικά</u>**: AB + BΓ = AΓ , δηλαδή σαν να «κολλάνε» τα διανύσματα και να εξαφανίζεται το σημείο Β. Είναι το αντίστροφο της παρεμβολής όρων (δες παρατήρηση 1). Αυτός ο τρόπος είναι πιο εφαρμόσιμος στις ασκήσεις αφού δεν είναι απαραίτητο το σχήμα.*

5. Οι **πράξεις των διανυσμάτων** φαίνονται συνοπτικά με το παρακάτω παραλληλόγραμμο.

Σημείωση: Η γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ είναι **οξεία**, για να ισχύουν τα επόμενα.



- Η **μεγαλύτερη διαγώνιος** του παραλληλογράμμου μας δίνει το **άθροισμα** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$
- Η **μικρότερη διαγώνιος** (με κατάλληλη φορά) μας δίνει την **διαφορά** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$
- Το **μισό της μεγαλύτερης διαγωνίου**, μας δίνει την διανυσματική ακτίνα μέσου, δηλαδή το ημιάθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$
- Τέλος, **το μισό της μικρότερης διαγωνίου**, μας δίνει την ημιδιαφορά των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

*Σημείωση: Όλα τα παραπάνω, ισχύουν για το **παραπάνω σχήμα,** που η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι **οξεία**. Αν η γωνία είναι **αμβλεία** (ή ορθή) τότε αλλάζουν οι ρόλοι της μεγάλης – μικρής διαγωνίου.*

6. Ταύτιση σημείου

Για να βρούμε ένα σημείο που ταυτίζεται με κάποιο άλλο, αρκεί να καταλήξουμε στις σχέσεις:

❑ $\vec{BK} = \vec{0} \Rightarrow B \equiv K$, δηλαδή ένα διάνυσμα που είναι το μηδενικό, πρέπει τα άκρα του να ταυτίζονται.

❑ $\vec{AB} = \vec{AK} \Rightarrow B \equiv K$, δηλαδή το σημείο Β ταυτίζεται με το σημείο Κ. Δηλαδή προσπαθούμε να έχουμε δύο ίσα διανύσματα με ίδια αρχή (ή πέρας) οπότε θα έχουν και το ίδιο πέρας (ή αρχή)

(*Η δικαιολόγηση είναι η εξής:* $\vec{AB} = \vec{AK} \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{KA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{KA} + \vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow K \equiv B$)

7. Για να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα είναι **παράλληλα**, αρκεί να ισχύει ένα από τα εξής:

❑ Προσπαθούμε να καταλήξουμε στην μορφή, $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$ **(1η συνθήκη παραλληλίας)**

❑ Αν έχουμε **συντεταγμένες** των διανυσμάτων παίρνουμε την ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} = 0 \quad \textbf{(2η συνθήκη παραλληλίας)}$$

❑ Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ **δεν** είναι παράλληλα στον άξονα y΄y (δηλαδή το x είναι διάφορο του μηδενός) ισχύει η εξής ισοδυναμία: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$ **(3η συνθήκη παραλληλίας)**

Σημείωση: *Την πρώτη συνθήκη την χρησιμοποιούμε όταν δίνονται οι σχέσεις μεταξύ των διανυσμάτων ή αναζητούμε ομόρροπα – αντίρροπα διανύσματα. Την δεύτερη μορφή την παίρνουμε όταν έχουμε συντεταγμένες διανυσμάτων. Την τελευταία μορφή την χρησιμοποιούμε όταν αναζητούμε την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα x΄x.*

8. Ομόρροπα και αντίρροπα διανύσματα

Για να είναι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$,

Ομόρροπα διανύσματα

Α΄ τρόπος: Με τον ορισμό

Β τρόπος: Με την 1η συνθήκη παραλληλίας, δηλαδή $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$, με $\boldsymbol{\lambda > 0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$

Γ΄ τρόπος: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων είναι 0 rad, δηλαδή

$\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \Leftrightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

Δ΄ τρόπος: Με τα μέτρα, δηλαδή $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ *(θέλει απόδειξη πριν την εφαρμόσουμε)*

Αντίρροπα διανύσματα

Α΄ τρόπος: Με τον ορισμό

Β τρόπος: Με την 1η συνθήκη παραλληλίας, δηλαδή $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\cdot\vec{\beta}$, **με $\lambda < 0$** και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$

Γ΄ τρόπος: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων είναι π rad, δηλαδή

$\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta} \Leftrightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \pi \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

Δ΄ τρόπος: Με τα μέτρα, δηλαδή $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right|$ *(θέλει απόδειξη πριν την εφαρμόσουμε)*

Πρώτα εξασφαλίζουμε ότι τα διανύσματα είναι παράλληλα, αποδεικνύοντας μία από τις συνθήκες παραλληλίας, και μετά παίρνουμε την πρώτη συνθήκη παραλληλίας και βρίσκουμε το λ. Αν το λ είναι θετικό, τα διανύσματα είναι ομόρροπα, αλλιώς αντίρροπα. Δείτε το παρακάτω παράδειγμα

Παράδειγμα

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,-6)$, $\vec{\beta} = (1,-3)$ **.Να δείξετε ότι είναι ομόρροπα.**

Λύση

Καταρχάς θα δείξουμε ότι τα διανύσματα είναι παράλληλα από την δεύτερη συνθήκη παραλληλίας, δηλαδή,

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3) - 1\cdot(-6) = -6+6 = 0 \quad \text{άρα} \quad \vec{\alpha}//\vec{\beta}$$

Θα δείξουμε ότι τα *διανύσματα είναι **ομόρροπα**, από την πρώτη συνθήκη παραλληλίας.*

Παίρνουμε το ένα διάνυσμα και θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε στο άλλο:

$$\vec{\alpha} = (2,-6) = 2\cdot(1,-3) = 2\cdot\vec{\beta} \quad \text{άρα} \quad \vec{\alpha} = 2\cdot\vec{\beta} \quad \text{οπότε} \quad \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$$

9. Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία Α, Β και Γ είναι **συνευθειακά** αποδεικνύουμε δύο διανύσματα που σχηματίζονται από αυτά τα σημεία είναι παράλληλα μεταξύ τους, δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι $\vec{AB}//\vec{A\Gamma}$ ή $\vec{B\Gamma}//\vec{BA}$ άρα είναι **παράλληλα διανύσματα με ένα κοινό άκρο**, επομένως απορρίπτεται η περίπτωση να είναι σε διαφορετικούς φορείς, οπότε ανήκουν στην ίδια ευθεία δηλαδή τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

10. Γενικά **δεν** μπορούμε να μετατρέψουμε τις **σχέσεις μέτρων σε διανυσματικές σχέσεις**.

Δηλαδή γενικά **δεν** ισχύει, $(AB) = (KM) \Rightarrow \vec{AB} = \vec{KM}$

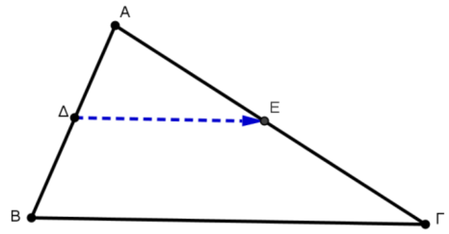
Η μετατροπή αυτή γίνεται όταν:

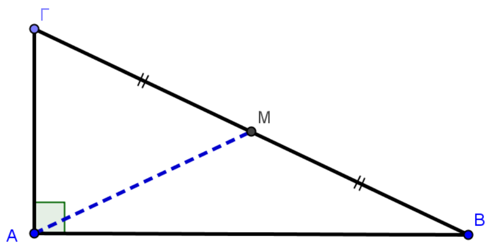
- Τα ευθύγραμμα τμήματα να είναι π α ρ ά λ λ η λα
- Και τα διανύσματα να έχουν τις ίδιες φορές.

Σχηματική ερμηνεία / Παραδείγματα

Α. $(ΒΓ)=2\cdot(ΕΔ)\Leftrightarrow \vec{ΒΓ}=2\cdot\vec{ΔΕ}$

Σ’ αυτήν την περίπτωση γίνεται αυτή η μετατροπή, αφού τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ // ΒΓ . Προσέξαμε όμως τις φορές των διανυσμάτων, έχουν φορά και τα δύο διανύσματα προς τα δεξιά.





Β. Ενώ σε **ορθογώνιο τρίγωνο** ΑΒΓ με ΒΓ υποτείνουσα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, ισχύει, (ΒΓ) = 2 (ΑΜ) τότε **δεν** μπορούμε να την μετατρέψουμε σε διανυσματική σχέση, αφού **δεν** είναι παράλληλα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΜ και ΒΓ.

Γ. Επίσης αν ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) **ισοσκελές** τρίγωνο, τότε **δεν** είναι σωστό να γράψουμε: $\vec{ΑΒ}=\vec{ΑΓ}$.

11. Για να δείξουμε μια παράσταση διανυσμάτων ότι είναι **σταθερή**, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισούται με διανύσματα που αποτελούνται από σταθερά σημεία, ή δεν υπάρχει το μεταβλητό σημείο μέσα στην σχέση.

12. **Εργαλείο θεωρίας – ασκήσεων : Βασικές ασκήσεις 1 και 2**

Έστω τα **μη** μηδενικά διανύσματα $\vec{α},\vec{β}$ τέτοια ώστε $\vec{α}\nparallel\vec{β}$, να αποδείξετε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

1) $κ\cdot\vec{α}+λ\cdot\vec{β}=\vec{0}\Leftrightarrow κ=λ=0$

2) $x_1\cdot\vec{α}+y_1\cdot\vec{β}=x_2\cdot\vec{α}+y_2\cdot\vec{β}\Leftrightarrow\{x_1=x_2 \text{ και } y_1=y_2\}$

Παράδειγμα 1

Έστω ΑΒΓ τρίγωνο τέτοιο ώστε $(1-λ)\cdot\vec{ΑΒ}+(3μ-2)\cdot\vec{ΒΓ}=\vec{0},\ λ,μ\in\mathbb{R}$, υπολογίστε τα λ, μ.

Λύση

1) Επειδή τα διανύσματα $\vec{ΑΒ},\vec{ΒΓ}$ **δεν** είναι παράλληλα, από την *βασική άσκηση 1* έχουμε:
1– λ =0 και 3μ – 2 = 0 άρα λ = 1 και μ = 2/3

Παράδειγμα 2

Έστω ΑΒΓ τρίγωνο τέτοιο ώστε $λ\cdot\vec{ΑΒ}=(μ+2)\cdot\vec{ΑΓ},\ λ,μ\in\mathbb{R}$, υπολογίστε τα λ, μ

Λύση

Έχουμε, $λ\cdot\vec{ΑΒ}=(μ+2)\cdot\vec{ΑΓ}\Leftrightarrow λ\cdot\vec{ΑΒ}-(μ+2)\cdot\vec{ΑΓ}=\vec{0}$ και επειδή τα διανύσματα $\vec{ΑΒ},\vec{ΑΓ}$ δεν είναι παράλληλα, από την βασική άσκηση 1 παίρνουμε: λ = 0 και μ + 2 = 0 άρα λ = 0 και μ = – 2

Παράδειγμα 3

Δίνονται δύο μη παράλληλα διανύσματα $\vec{α},\vec{β}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{α}-3\vec{β},\ \vec{v}=(1-2x)\vec{α}+\vec{β}$ να είναι συγγραμικά, βρείτε τον πραγματικό αριθμό x.

Λύση

Επειδή τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ είναι παράλληλα – συγραμμικά έχουμε διαδοχικά

$$\vec{u}=\lambda\cdot\vec{v}\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=\lambda\left((1-2x)\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=(\lambda-2\lambda x)\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{\beta}$$
$$\Leftrightarrow (\text{βασική άσκηση } 2)$$
$$\Leftrightarrow \{\lambda-2\lambda x=2 \;\text{ και }\; \lambda=-3\}$$
$$\Leftrightarrow \left\{x=\frac{5}{6} \;\text{ και }\; \lambda=-3\right\}$$

13. Ισότητα διανυσμάτων

Όταν έχουμε δύο διανύσματα που δίνονται οι συντεταγμένες τους και είναι **ίσα**, τότε εξισώνουμε τις ομώνυμες συντεταγμένες τους, δηλαδή

$$\begin{cases}\vec{\alpha}=\vec{\beta}\Leftrightarrow (x_A,y_A)=(x_B,y_B)\Leftrightarrow\{x_A=x_B \text{ και } y_A=y_B\}\\ \text{και}\\ \vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow (x_A,y_A)=(0,0)\Leftrightarrow\{x_A=0 \text{ και } y_A=0\}\end{cases}$$

Επίσης ισχύουν οι εξής σχέσεις:

α) $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow AB\Delta\Gamma$ ***παραλληλόγραμμο*** *(όταν τα Α,Β,Γ,Δ είναι ΜΗ συνευθειακά σημεία)*

β) $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow$ αλλαγή **«μέσων όρων»** $\Leftrightarrow \vec{A\Gamma}=\vec{B\Delta}$

γ) $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow$ αλλαγή **«άκρων όρων»** $\Leftrightarrow \vec{\Delta B}=\vec{\Gamma A}$

δ) $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow$ αλλαγή **«μέσων» και «άκρων όρων»** $\Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma}=\vec{BA}$

Σημείωση: Με τον παραπάνω τρόπο- τέχνασμα, δεν είναι απαραίτητο να έχουμε σχήμα για να προκύψουν οι σχέσεις.

14. Συντεταγμένες διανύσματος

Όταν έχουμε διάνυσμα της μορφής,

$$\vec{\alpha}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=(x,y)\Leftrightarrow\vec{OA}=(x,y)\Leftrightarrow A(x,y)$$

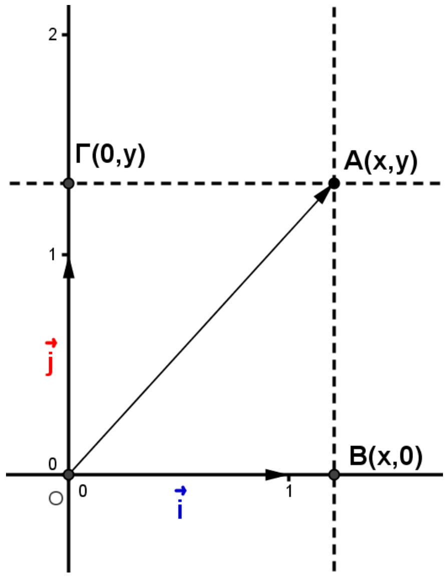
που μας συνδέει την **αναλυτική μορφή** του διανύσματος με τις **συντεταγμένες** του διανύσματος και τις συντεταγμένες του πέρατος του διανύσματος.

Σχηματική ερμηνεία:

Τα μοναδιαία διανύσματα έχουν συντεταγμένες,

$$\vec{i}=(1,0),\quad \vec{j}=(0,1)$$

Τα μοναδιαία διανύσματα μας βοηθήσανε να αριθμήσουμε τους άξονες. Δηλαδή με τα μοναδιαία διανύσματα κατασκευάσαμε δύο «αριθμοάξονες».



15. Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\beta},\vec{\gamma}$, δηλαδή,

$$\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}+\mu\cdot\vec{\gamma}$$

Αν δίνονται και τα τρία διανύσματα και ζητείται ο γραμμικός τους συνδυασμός, τότε γράφουμε την προηγούμενη μορφή, αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες τους, κάνουμε πράξεις, και από ισότητα των διανυσμάτων παίρνουμε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους. Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε τα λ, μ. Άρα έχουμε τα λ, μ οπότε και των γραμμικών συνδυασμό τους.

Επίσης δες την ***παρατήρηση 19****, μας περιγράφει πως βρίσκουμε το μέτρο ενός γραμμικού συνδυασμού.*

Παράδειγμα

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-1),\ \vec{\beta}=(-2,3),\ \vec{\gamma}=(0,1)$

Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ **ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων** $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ **.**

Λύση

Έχουμε διαδοχικά,

$$\vec{\gamma}=\lambda\cdot\vec{\alpha}+\mu\cdot\vec{\beta}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(0,1)=\lambda\cdot(1,-1)+\mu\cdot(-2,3)$$
$$\Leftrightarrow(0,1)=(\lambda-2\mu,-\lambda+3\mu)$$
$$\Leftrightarrow\{0=\lambda-2\mu\ \text{ και }\ 1=-\lambda+3\mu\}$$
$$\Leftrightarrow\{\lambda=2\ \text{ και }\ \mu=1\}$$

Οπότε, $\vec{\gamma}=2\cdot\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

16. Όταν δίνονται τρία διαφορετικά σημεία και θέλουμε να αποδείξουμε ότι σχηματίζουν **τρίγωνο**, αρκεί να δείξουμε ότι **δεν** είναι συνευθειακά σημεία, δηλαδή τα Α, Β , Γ σχηματίζουν τρίγωνο, αρκεί τα διανύσματα πχ. $\vec{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ **να μην** είναι παράλληλα.

17. Εσωτερικό γινόμενο

Όταν έχουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων **προσέχουμε** και τα δύο διανύσματα να ξεκινάνε με την **ίδια κορυφή** (για σωστή εύρεση της γωνίας). Αν δεν ξεκινάνε με την ίδια κορυφή τότε πρέπει να το κάνουμε αλλάζοντας τα άκρα του ενός διανύσματος και βάζοντας ένα επιπλέον μείον μπροστά από αυτά. Δηλαδή,

- $\vec{AB}\cdot\vec{AK}=$ γινόμενο διανυσμάτων με **κοινή αρχή**
- $\vec{AB}\cdot\vec{KA}=$ γινόμενο διανυσμάτων με **μη κοινή αρχή** $=-\vec{AB}\cdot\vec{AK}$
- $\vec{BA}\cdot\vec{KA}=$ γινόμενο διανυσμάτων με **κοινό πέρας** $=\vec{AB}\cdot\vec{AK}$

18. Ιδιότητες Εσωτερικού γινομένου

- $$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\begin{cases}|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right), & \text{αν } \vec{\alpha}\neq\vec{0} \text{ και } \vec{\beta}\neq\vec{0}\\ 0, & \text{αν } \vec{\alpha}=\vec{0} \text{ ή } \vec{\beta}=\vec{0}\end{cases}\ (\text{ορισμός})$$

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
- $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2$ (Δύναμη διανύσματος)
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}>0\Leftrightarrow 0<\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)<\frac{\pi}{2}$ (οξεία γωνία)
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)<\pi$ (αμβλεία γωνία)
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow \begin{cases}\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\\ \text{ή}\\ \vec{\alpha}=\vec{0}\\ \text{ή}\\ \vec{\beta}=\vec{0}\end{cases}$
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2$
- $(\lambda\vec{\alpha})\vec{\beta}=\vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta})=\lambda\cdot\vec{\alpha}\vec{\beta},\ \lambda\in\mathbb{R}$
- $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ (επιμεριστική ιδιότητα)
- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=-1$ για $\vec{\alpha},\vec{\beta}\not\parallel y'y$ (2η συνθήκη καθετότητας διανυσμάτων)

Επικίνδυνες ιδιότητες που ΔΕΝ ισχύουν για το εσωτερικό γινόμενο

- $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\neq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ αλλά $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ (*Ανισότητα **C**auchy - **S**chwarz*) (Εφαρμογή 1i / σελ. 44)

Απόδειξη

Η ζητούμενη σχέση γίνεται ισοδύναμα:

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\Leftrightarrow-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\leq\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\leq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\Leftrightarrow-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\leq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\overset{\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow}-1\leq\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\leq1$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$ ή όταν $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\pm1$, δηλαδή όταν τα διανύσματα είναι ομόρροπα ή αντίρροπα, οπότε ισχύει η ισότητα όταν γενικά $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$.

- $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\neq\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$ αλλά $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\leq\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$ (Εφαρμογή 1ii / σελ. 44)

Απόδειξη

Παίρνουμε το α΄ μέλος της ζητούμενης σχέσης,

$$\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2=\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|^2\underset{(C-S)}{\leq}\left(|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\right)^2=|\vec{\alpha}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$$

Η ισότητα ισχύει όταν ένα από τα διανύσματα είναι μηδενικό ή $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$ (όπως προηγουμένως)

• $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\right)\neq\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

Το α΄ μέλος είναι της μορφής $\vec{\alpha}\cdot\lambda$, που **δεν** έχουμε ορίσει κάτι ανάλογο στην θεωρία, άρα **δεν** ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα διανυσμάτων.

Σημείωση: *Έστω ότι ορίζαμε το διάνυσμα $\vec{\alpha}\cdot\lambda$, τότε πάλι* ***δεν*** *θα ίσχυε η προσεταιριστική ιδιότητα διανυσμάτων. Φαίνεται εύκολα από το επόμενο* ***αντιπαράδειγμα****.*

Έστω, $\vec{\alpha}=(1,-1)$, $\vec{\beta}=(2,3)$, $\vec{\gamma}=(-3,4)$ τότε *εύκολα βρίσκουμε ότι* $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=6$

οπότε $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\right)=(1,-1)\cdot 6=(6,-6)$ ενώ $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}=(-1)\cdot(-3,4)=(3,-4)\neq(6,-6)$

• $\left\{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\ \text{ και }\ \vec{\alpha}\neq\vec{0}\right\}\not\Rightarrow\vec{\beta}=\vec{\gamma}$

Μπορεί να ισχύει και $\vec{\alpha}\perp\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)$, γιατί, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)=\vec{0}$ και από την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου τότε ισχύει ένα από τα εξής:

$$\begin{cases}\vec{\alpha}=\vec{0}\ \ (\text{απορρίπτεται λόγω περιορισμών})\\ \text{ή}\\ \vec{\beta}-\vec{\gamma}=0\ \text{ δηλ. } \vec{\beta}=\vec{\gamma}\\ \text{ή}\\ \vec{\alpha}\perp\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)\end{cases}$$

Γενικά δεν ισχύει ο κανόνας της διαγραφής στα διανύσματα.

---

19. Στο **εσωτερικό γινόμενο,** ισχύουν οι **γνωστές ταυτότητες** που ισχύουν και στους πραγματικούς αριθμούς, αν εφαρμόσουμε σωστά την επιμεριστική και αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή,

$$(\vec{a}+\vec{\beta})^2=(\vec{a}+\vec{\beta})\cdot(\vec{a}+\vec{\beta})=\vec{a}^{\,2}+\vec{a}\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{a}+\vec{\beta}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2$$

όμοια παίρνουμε και τις άλλες ταυτότητες.

20. Αν έχουμε γνωστά τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και την γωνία τους, για να **βρούμε το μέτρο ενός γραμμικού συνδυασμού** $\vec{\gamma}$ αυτών, **αρκεί να βρούμε το** $|\vec{\gamma}|^2$ **.**

Παράδειγμα

Αν $|\vec{\alpha}|=1,\ |\vec{\beta}|=\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{3\pi}{4}$ *να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος:* $\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα το μέτρο του $|\vec{\gamma}|^2$, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες και πράξεις των διανυσμάτων,

$$|\vec{\gamma}|^2=\vec{\gamma}^2=(3\vec{\alpha}-2\vec{\beta})^2=9|\vec{\alpha}|^2-12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4|\vec{\beta}|^2=9\cdot 1^2-12|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\frac{3\pi}{4}+4\cdot\sqrt{2}^2=29$$

οπότε $|\vec{\gamma}|^2=29$ άρα $|\vec{\gamma}|=\sqrt{29}$

21. Οι **συνθήκες καθετότητας** μεταξύ δύο διανυσμάτων είναι:

- $\vec{a}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{\beta}=0$ **(1η συνθήκη καθετότητας)** *(ισχύει και για μηδενικά διανύσματα)*
- $\vec{a}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{a}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=-1,$ όπου $\vec{a},\vec{\beta}\not\parallel y'y$ **(2η συνθήκη καθετότητας)**

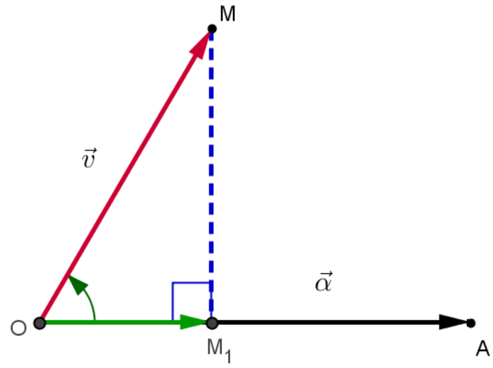
22. <u>**Προβολή διανύσματος πάνω σε άλλο**</u>

Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{OM}=\vec{v}$ και $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ τέτοια ώστε $\left(\widehat{\vec{v},\vec{\alpha}}\right)\neq\dfrac{\pi}{2}$, δηλαδή δεν είναι κάθετα, τότε οι βασικές ιδιότητες της προβολής του διανύσματος $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ είναι:

- Ιδιότητα 1η: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}=\overrightarrow{OM_1}$, όπου M_1 η προβολή του σημείου M στην $|\overrightarrow{OA}|$
- Ιδιότητα 2η: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}\,/\!/\,\vec{\alpha}\Leftrightarrow\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}=\lambda\cdot\vec{\alpha},\ \ \lambda\in\mathbb{R}^*$
- Ιδιότητα 3η: $0<\left(\widehat{\vec{v},\vec{\alpha}}\right)<\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}\upuparrows\vec{\alpha}$
- Ιδιότητα 4η: $\dfrac{\pi}{2}<\left(\widehat{\vec{v},\vec{\alpha}}\right)<\pi\Leftrightarrow\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}\uparrow\downarrow\vec{\alpha}$
- Ιδιότητα 5η: $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$ (Βασικός τύπος)
- Ιδιότητα 6η: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}=\left(\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{|\vec{\alpha}|^2}\right)\cdot\vec{\alpha}$ (Βασική άσκηση 3η) $\left(\text{για }\ \vec{\alpha}\neq\vec{0}\right)$

• Ιδιότητα 7η: $\left|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}\right| = \dfrac{\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right|} = \left|\vec{v}\right|\cdot\left|\text{συν}\left(\widehat{\vec{v},\vec{\alpha}}\right)\right|$ (Βασική άσκηση 4η) (για $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$)

• Ιδιότητα 8η: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\left(\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma}\right) = \lambda\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}+\mu\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}$, (Βασική άσκηση 5η) (για $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$)



<u>Απόδειξη / Ιδιότητα 6η</u>

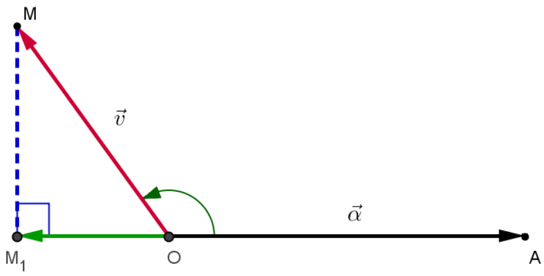
Έχουμε από την ιδιότητα 2η,

$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} // \vec{\alpha} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} = \lambda\cdot\vec{\alpha},\ \ \lambda\in\mathbb{R}^*$ (1)

Αρκεί να υπολογίσουμε τον αριθμό λ.

Αντικαθιστούμε την σχέση (1) στην ιδιότητα 5, δηλαδή,

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot\left(\lambda\vec{\alpha}\right) \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \lambda\vec{\alpha}^2 \overset{\vec{\alpha}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow} \lambda = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}$$



Οπότε η σχέση (1) γίνεται: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} = \left(\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}\right)\cdot\vec{\alpha}$

<u>Απόδειξη / Ιδιότητα 7η</u>

Από την ιδιότητα 6η έχουμε για $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} = \left(\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}\right)\cdot\vec{\alpha}$, οπότε

$$\left|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}\right| = \left|\left(\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}\right)\cdot\vec{\alpha}\right| = \left|\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}\right|\cdot\left|\vec{\alpha}\right|$$

(Προσοχή! "Έσπασε" το μέτρο επειδή είναι της μορφής $\lambda\cdot\vec{\alpha}$)

$$= \frac{\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}\cdot\left|\vec{\alpha}\right| = \frac{\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right|}$$

$$= \frac{\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\text{συν}\left(\widehat{\vec{v},\vec{\alpha}}\right)\right|}{\left|\vec{\alpha}\right|} = \left|\vec{v}\right|\cdot\left|\text{συν}\left(\widehat{\vec{v},\vec{\alpha}}\right)\right|$$

<u>Απόδειξη / Ιδιότητα 8η</u>

Παίρνουμε το α΄ μέλος και με την βοήθεια της 6ης ιδιότητας θα καταλήξουμε στο β΄ μέλος (δουλεύοντας με ισότητες) και για $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ έχουμε,

$$\pi\rho o\beta_{\vec\alpha}\left(\lambda\vec\beta+\mu\vec\gamma\right)=\frac{\vec\alpha\cdot\left(\lambda\vec\beta+\mu\vec\gamma\right)}{|\vec\alpha|^2}\cdot\vec\alpha$$

$$=\frac{\lambda\vec\beta\cdot\vec\alpha+\mu\vec\gamma\cdot\vec\alpha}{|\vec\alpha|^2}\cdot\vec\alpha$$

$$=\frac{\lambda\vec\beta\cdot\vec\alpha}{|\vec\alpha|^2}\cdot\vec\alpha+\frac{\mu\vec\gamma\cdot\vec\alpha}{|\vec\alpha|^2}\cdot\vec\alpha$$ *(δηλαδή η προβολή του διανύσματος πάνω σε διάνυσμα είναι* ***γραμμική****)*

$$=\lambda\cdot\frac{\vec\beta\cdot\vec\alpha}{|\vec\alpha|^2}\cdot\vec\alpha+\mu\cdot\frac{\vec\gamma\cdot\vec\alpha}{|\vec\alpha|^2}\cdot\vec\alpha$$

$$=\lambda\cdot\pi\rho o\beta_{\vec\alpha}\vec\beta+\mu\cdot\pi\rho o\beta_{\vec\alpha}\vec\gamma$$

23. Μέτρο διανύσματος

Το μέτρο διανύσματος έχει πολλές ιδιότητες όπως βλέπουμε παρακάτω:

- $\vec\alpha=\vec\beta\Rightarrow|\vec\alpha|=|\vec\beta|$ το αντίστροφο **δεν** ισχύει
- $\vec\alpha=-\vec\beta\Rightarrow|\vec\alpha|=|\vec\beta|$ το αντίστροφο **δεν** ισχύει
- $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|$
- $|\vec0|=0$
- $\left|\overrightarrow{AB}\right|=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\vec0\Leftrightarrow A\equiv B$ (εδώ ισχύει το αντίστροφο)
- $|\lambda\cdot\vec\alpha|=|\lambda|\cdot|\vec\alpha|$, όπου $|\lambda|$ το απόλυτο του αριθμού λ, ενώ $|\vec\alpha|$ το μέτρο του διανύσματος $\vec\alpha$
- $|\vec\alpha|^2=\vec\alpha^2$
- $\left|\underbrace{|\vec\alpha|-|\vec\beta|}_{\text{αριθμός}}\right|\le|\vec\alpha\pm\vec\beta|\le|\vec\alpha|+|\vec\beta|$,από τριγωνική ανισότητα για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec\alpha,\vec\beta$
- $|\vec\alpha+\vec\beta+\vec\gamma|\le|\vec\alpha|+|\vec\beta|+|\vec\gamma|$, εφαρμογή βιβλίου (άρα την γνωρίζουμε ως θεωρία) για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma$
- $\vec\alpha\uparrow\uparrow\vec\beta\Leftrightarrow|\vec\alpha+\vec\beta|=|\vec\alpha|+|\vec\beta|$
- $\vec\alpha\uparrow\downarrow\vec\beta\Leftrightarrow|\vec\alpha+\vec\beta|=\left|\underbrace{|\vec\alpha|-|\vec\beta|}_{\text{αριθμός}}\right|$
- $\vec\alpha\nparallel\vec\beta\Leftrightarrow\left||\vec\alpha|-|\vec\beta|\right|<|\vec\alpha+\vec\beta|<|\vec\alpha|+|\vec\beta|$
- $\left||\vec\alpha|-|\vec\beta|\right|=|\vec\alpha+\vec\beta|=|\vec\alpha|+|\vec\beta|\Leftrightarrow\left\{\vec\alpha=\vec0 \text{ ή } \vec\beta=\vec0\right\}$

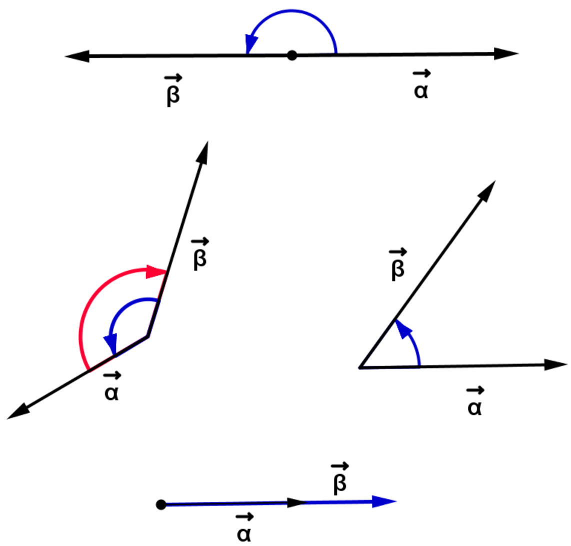
24. Διάνυσμα ή αριθμός;

Ένα *γρήγορο* ***τυπολόγιο*** που μας υπενθυμίζει τι είναι το καθένα.

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=$ διάνυσμα
- $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=$ διάνυσμα
- $\lambda\cdot\vec{\alpha}=$ διάνυσμα *(παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$)*
- $\vec{\alpha}\cdot\lambda=$ δεν ορίζεται
- $\dfrac{\vec{\alpha}}{\lambda}=$ διάνυσμα
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$ αριθμός
- $\vec{\alpha}^{2}=$ αριθμός
- $\vec{\alpha}:\vec{\beta}=$ δεν ορίζεται
- $|\vec{\alpha}|=$ αριθμός (μη αρνητικός)
- $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=$ **γωνία**
- $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=$ διάνυσμα ***(****παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$)*
- $0=$ αριθμός, $0^0=$ γωνία σε μοίρες, $0\text{ rad}=$ γωνία, ενώ $\vec{0}=$ διάνυσμα

25. Γωνίες και διανύσματα

Στα διανύσματα δύο είδη γωνιών μας απασχολούν, η κυρτή γωνία που σχηματίζουν δύο διανύσματα και συνήθως την συμβολίζουμε με το γράμμα θ και την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα x'x, συνήθως την ονομάζουμε με το γράμμα φ. Παρουσιάζουμε αναλυτικά τις παραπάνω γωνίες.



(Α) Κυρτή γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων

Συμβολισμός: $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\theta$

Ιδιότητες

Για τα **μη** μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύουν:

- $0\le\theta\le\pi$
- $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}}\right)=\theta$

- $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\alpha}}\right)=0$
- $\left(\widehat{\vec{\alpha},-\vec{\alpha}}\right)=\pi$
- $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\theta=0$
- $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\theta=\pi$
- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$, όπου $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$

Γενικότερα, *αν έχουμε δύο διανύσματα* $\vec{u},\vec{v}$ *που δίνονται ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων* $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ *,τότε θα βρίσκουμε το εσωτερικό τους γινόμενο και τα μέτρα τους. Τέλος παίρνουμε τον τύπο και αντικαθιστούμε.* ***Επίσης***, *αν ζητείται ή δίνεται η γωνία μεταξύ διανυσμάτων θα παίρνουμε τον παραπάνω τύπο.*

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}>0\Leftrightarrow 0<\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)<\dfrac{\pi}{2}$ (οξεία)
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}<\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)<\pi$ (αμβλεία)
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ (ορθή)
- $0\le\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{0}}\right)\le\pi$
- $\boxed{\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=|\varphi_1-\varphi_2|}$, όπου φ_1, φ_2 οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με τον άξονα x'x

Προσοχή στην επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων

Έστω ότι έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=-\kappa,\ \text{όπου}\ 0<\kappa\le 1}$ *τότε ακολουθούμε τα εξής βήματα:*

α) Βρίσκουμε μια ***οξεία γωνία ω*** *που το συνημίτονο της να δίνει το* ***θετικό αποτέλεσμα*** *του συνημίτονου της γωνίας των δύο διανυσμάτων, δηλαδή το* ***κ***. *Πιο αναλυτικά, αναζητούμε γωνία ω τέτοια ώστε:* $\sigma\upsilon\nu\omega=\kappa$

β) Η ζητούμενη γωνία των δύο διανυσμάτων για έχει ***αρνητικό συνημίτονο*** *πρέπει να βρίσκεται στο* ***δεύτερο τεταρτημόριο***, *αφού* $0\le\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\le\pi$, άρα $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\pi-\omega$.

Μαθηματική ερμηνεία: $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=-\sigma\upsilon\nu\omega\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\sigma\upsilon\nu(\pi-\omega)\overset{0\le\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\le\pi}{\Leftrightarrow}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\pi-\omega$

πχ. $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)$ άρα $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$

- ***Βασική άσκηση 6:*** $\boxed{\left.\begin{array}{l}\vec{\alpha}\,/\!/\,\vec{\gamma}\\ \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\theta\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}}\right)=\theta\ \text{ή}\ \left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}}\right)=\pi-\theta\right\}}$

- ***Βασική άσκηση 7:*** $\left.\begin{matrix}\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}\\ \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\theta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}}\right)=\theta$

- ***Βασική άσκηση 8:*** *Για μη κάθετα διανύσματα* $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ *ισχύει:*

$$\left\{\vec{\alpha}\perp\vec{u}\ \text{ και }\ \vec{\beta}\perp\vec{v}\right\}\Rightarrow\left\{\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\ \text{ή}\ \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\pi-\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right\}$$

Αποδείξεις Βασικών ασκήσεων

3) Θεωρούμε ότι τα διανύσματα είναι μη μηδενικά, αλλιώς η απόδειξη είναι προφανής.

Αν $\phi=(\vec{\gamma},\vec{\beta})$ έχουμε:

$\vec{a}//\vec{\gamma}\Rightarrow\vec{a}=\lambda\vec{\gamma}\Rightarrow\vec{a}\vec{\beta}=\lambda(\vec{\gamma}\vec{\beta})\Rightarrow|\vec{a}||\vec{\beta}|\cos\theta=\lambda|\vec{\gamma}||\vec{\beta}|\cos\phi$

$\Rightarrow|\vec{a}|\cos\theta=\lambda|\vec{\gamma}|\cos\phi$

$\Rightarrow|\lambda\vec{\gamma}|\cos\theta=\lambda|\vec{\gamma}|\cos\phi$

$\Rightarrow|\lambda|\cos\theta=\lambda\cos\phi$

$\Rightarrow\cos\theta=\pm\cos\phi$

$\Rightarrow\{\phi=\theta\ \text{ ή }\ \phi=\pi-\theta\}$

4) Όμοια με την 3η Βασική άσκηση, αφού είναι ομόρροπα έχουμε $\lambda>0\Rightarrow|\lambda|=\lambda$, έτσι προκύπτει μόνο $\cos\phi=\cos\theta$ άρα $\phi=\theta$,λόγω $\varphi,\theta\in[0,\pi]$.

5) ***Α΄ τρόπος:*** Προκύπτει γεωμετρικά *(οξείες ή αμβλείες γωνίες με πλευρές κάθετες)*

Β τρόπος: *Αλγεβρικά με συντεταγμένες διανυσμάτων*

Έστω $\vec{u}=(x_1,y_1)$, $\vec{v}=(x_2,y_2)$, $\vec{a}=(x_3,y_3)$, $\vec{\beta}=(x_4,y_4)$ και έστω ότι κανένα από τα διανύσματα δεν έχει τη διεύθυνση κάποιου άξονα.

Από τις καθετότητες προκύπτουν: $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow x_1x_3+y_1y_3=0\Leftrightarrow y_3=-\dfrac{x_1x_3}{y_1}\quad(1)}$

και $\boxed{\vec{\beta}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow x_2x_4+y_2y_4=0\Leftrightarrow y_4=-\dfrac{x_2x_4}{y_2}\quad(2)}$. Για τη γωνία φ ισχύει: $\cos\phi=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\quad(3)$.

Αν θ η γωνία των $\vec{a},\vec{\beta}$ τότε:

$$\cos\theta=\frac{x_3x_4+y_3y_4}{\sqrt{x_3^2+y_3^2}\cdot\sqrt{x_4^2+y_4^2}}\overset{(1),(2)}{=}\frac{x_3x_4+\dfrac{x_1x_3}{y_1}\dfrac{x_2x_4}{y_2}}{\sqrt{x_3^2+\left(-\dfrac{x_1x_3}{y_1}\right)^2}\cdot\sqrt{x_4^2+\left(-\dfrac{x_2x_4}{y_2}\right)^2}}$$

$$=\frac{|y_1y_2|(x_3x_4y_1y_2+x_1x_3x_2x_4)}{y_1y_2\sqrt{y_1^2x_3^2+x_1^2x_3^2}\cdot\sqrt{y_2^2x_4^2+x_2^2x_4^2}}=\frac{|y_1y_2|\cdot x_3x_4\cdot(y_1y_2+x_1x_2)}{y_1y_2\cdot|x_3x_4|\cdot\sqrt{y_1^2+x_1^2}\cdot\sqrt{y_2^2+x_2^2}}$$

$$\overset{(3)}{=}\frac{|y_1y_2|\cdot x_3x_4}{y_1y_2\cdot|x_3x_4|}\cdot\cos\phi=\pm\cos\phi$$

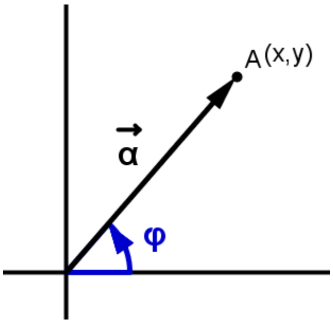
άρα οι γωνίες θ και φ είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

(Β) Γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ με τον άξονα x'x

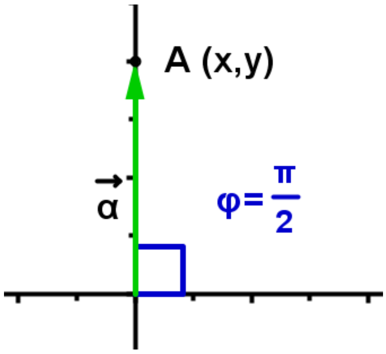
Ορισμός - Συμβολισμός

φ = η γωνία που διαγράφει ο θετικός ημιάξονας Οx,με κέντρο το σημείο Ο, αν κινηθεί κατά την θετική φορά (αντιωρολογιακή φορά) μέχρι να συμπέσει στην τελική πλευρά ΟΑ.

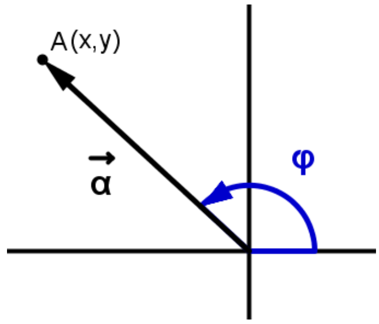
Σχήματα



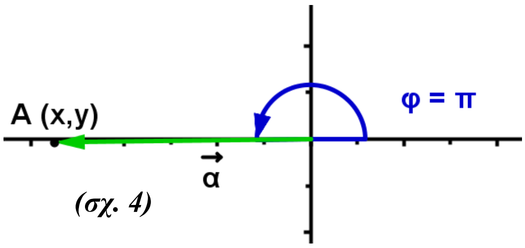
(σχ. 1)



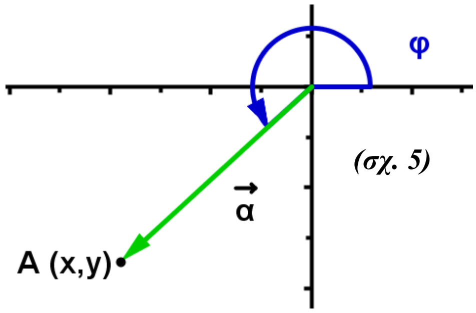
(σχ. 2)



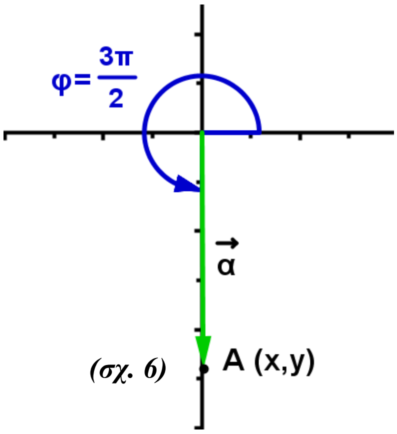
(σχ. 3)



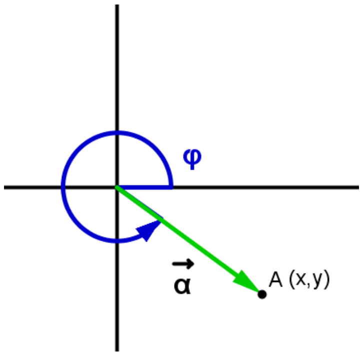
(σχ. 4)



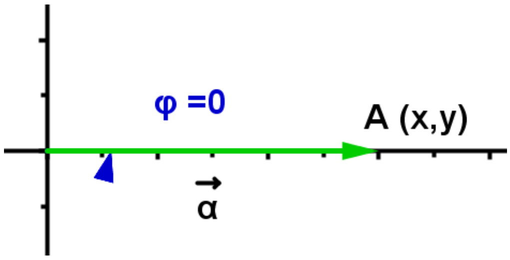
(σχ. 5)



(σχ. 6)



(σχ. 7)



(σχ. 8)

Ιδιότητες

- $0 \le \varphi < 2\pi$
- $\varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}//Ox \Leftrightarrow \vec{\alpha}=(x,0),\ x>0$ (δες σχ. 8)
- $\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{\alpha}//Oy \Leftrightarrow \vec{\alpha}=(0,y),\ y>0$ (δες σχ. 2)
- $\varphi = \pi \Leftrightarrow \vec{\alpha}//Ox' \Leftrightarrow \vec{\alpha}=(x,0),\ x<0$ (δες σχ. 4)

- $\varphi = \dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{\alpha}//Oy' \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (0, y),\ y < 0$ (δες σχ. 6)
- $\varphi = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left\{\vec{\alpha}\text{ διχοτόμος της γωνίας } xOy\right\} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (x, x),\ x > 0$
- $\varphi = \dfrac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \left\{\vec{\alpha}\text{ διχοτόμος της γωνίας } x'Oy\right\} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (-x, x),\ x > 0$
- $\varphi = \dfrac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \left\{\vec{\alpha}\text{ διχοτόμος της γωνίας } x'Oy'\right\} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (x, x),\ x < 0$
- $\varphi = \dfrac{7\pi}{4} \Leftrightarrow \left\{\vec{\alpha}\text{ διχοτόμος της γωνίας } xOy'\right\} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (x, -x),\ x > 0$
- $\varepsilon\varphi\varphi = \lambda_{\vec{\alpha}} = \dfrac{y}{x},\ x \neq 0$
- $\vec{\alpha}//y'y \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow \left\{\varphi = \dfrac{\pi}{2} \text{ ή } \varphi = \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ (δες σχ. $2-6$)
- $\vec{\alpha}//x'x \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \{\varphi = 0 \text{ ή } \varphi = \pi\}$ (δες σχ. $4-8$)

Αν φ_1, φ_2 οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με τον άξονα x'x αντίστοιχα τότε:

- **<u>Βασική άσκηση 9:</u>** $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2)}$ για $\varphi_2 < \varphi_1$ έχουμε, $\boxed{\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 \text{ ή } \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 2\pi - (\varphi_1 - \varphi_2)}$
- ***<u>Βασική άσκηση 10:</u>*** $\boxed{\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2}$
- ***<u>Βασική άσκηση 11:</u>*** $\boxed{\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta} \Leftrightarrow |\varphi_1 - \varphi_2| = \pi}$
- ***<u>Βασική άσκηση 12</u>:*** Γενικά, $\boxed{\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow |\varphi_1 - \varphi_2| = \kappa\cdot\pi}$, όπου $\kappa = 0, 1$.

Προσοχή στην επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων

Έστω ότι έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $\boxed{\sigma\upsilon\nu\varphi = -\kappa,\ \text{όπου } 0 < \kappa \leq 1}$ *τότε ακολουθούμε τα εξής βήματα:*

α) *Βρίσκουμε **οξεία γωνία ω** που το συνημίτονο της να δίνει το **θετικό αποτέλεσμα** του συνημίτονου της γωνίας των δύο διανυσμάτων, δηλαδή το **κ**. Πιο αναλυτικά, αναζητούμε γωνία ω τέτοια ώστε:* $\sigma\upsilon\nu\omega = \kappa$

β) *Η ζητούμενη γωνία των δύο διανυσμάτων για έχει **αρνητικό συνημίτονο** πρέπει να βρίσκεται στο **δεύτερο** ή **τρίτο** τεταρτημόριο, αφού* $0 \leq \varphi < 2\pi$, άρα $\varphi = \pi - \omega$ ή $\varphi = \pi + \omega$.

<u>Μαθηματική ερμηνεία</u>: $\sigma\upsilon\nu\varphi = -\sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) \overset{0\leq\varphi<2\pi}{\Leftrightarrow} \{\varphi = \pi - \omega \text{ ή } \varphi = \pi + \omega\}$

πχ.

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{άρα } \left\{\varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ ή } \varphi = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}\right\}$$

<u>Αποδείξεις των Βασικών ασκήσεων</u>

9) Υποθέτουμε ότι κανένα από τα διανύσματα δεν έχει τη διεύθυνση κάποιου άξονα (αλλιώς η απόδειξη είναι απλή και φανερή).

Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1),\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με $x_1\cdot x_2\neq 0$, τότε $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ (1)

Όμως γνωρίζουμε ότι, $\varepsilon\varphi\varphi_1=\dfrac{y_1}{x_1}$ (2) και $\varepsilon\varphi\varphi_2=\dfrac{y_2}{x_2}$ (3) αντικαθιστώντας στον τύπο

$\sigma\upsilon\nu^2 x=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2 x+1}$ προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\eta\mu\varphi_1=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}},\quad \sigma\upsilon\nu\varphi_1=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\ (2\alpha)\ \text{ή}\ \eta\mu\varphi_1=-\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}},\quad \sigma\upsilon\nu\varphi_1=-\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\ (2\beta)$$

και

$$\eta\mu\varphi_2=\frac{y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}},\quad \sigma\upsilon\nu\varphi_2=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\ (3\alpha)\ \text{ή}\ \eta\mu\varphi_2=-\frac{y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}},\quad \sigma\upsilon\nu\varphi_1=-\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\ (3\beta)$$

Τέλος, ισχύει $\sigma\upsilon\nu(\varphi_1-\varphi_2)=\sigma\upsilon\nu\varphi_1\sigma\upsilon\nu\varphi_2+\eta\mu\varphi_1\eta\mu\varphi_2$ (4) (είναι εκτός ύλης με την νέα ύλη της Β΄ Λυκείου Άλγεβρα).

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις **(2α), (3α) στην (4)** προκύπτει

$$\sigma\upsilon\nu(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\overset{(1)}{=}\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$$

Ομοίως, συνδυάζοντας τις σχέσεις **(2β), (3β) στην (4)** προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα δηλαδή,

$$\sigma\upsilon\nu(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\overset{(1)}{=}\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$$

10) Επειδή $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ τότε η γωνία τους είναι μηδέν, δηλαδή $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=0$, άρα από την ***Βασική άσκηση 9*** έχουμε,

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\sigma\upsilon\nu(\varphi_1-\varphi_2)\Rightarrow\sigma\upsilon\nu 0=\sigma\upsilon\nu(\varphi_1-\varphi_2)\Rightarrow\varphi_1=\varphi_2$$

11) Επειδή $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ τότε η γωνία τους είναι π, δηλαδή $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\pi$, άρα από την ***Βασική άσκηση 9*** έχουμε,

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\sigma\upsilon\nu(\varphi_1-\varphi_2)\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\pi=\sigma\upsilon\nu(\varphi_1-\varphi_2)\Rightarrow|\varphi_1-\varphi_2|=\pi$$

12) Από συνδυασμό των **βασικών ασκήσεων 10 και 11** έχουμε ότι,

$$\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\ \text{ τότε }\ \varphi_1=\varphi_2\ \text{ δηλαδή }\ \varphi_1-\varphi_2=0\cdot\pi\ \text{ άρα και }\ |\varphi_1-\varphi_2|=0\cdot\pi$$
$$\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\ \text{ τότε }\ |\varphi_1-\varphi_2|=\pi\ \text{ δηλαδή }\ |\varphi_1-\varphi_2|=1\cdot\pi$$

άρα τα παραπάνω συνοψίζονται στην εξής σχέση: $\boxed{\vec{\alpha}\,/\,/\,\vec{\beta}\Leftrightarrow|\varphi_1-\varphi_2|=\kappa\cdot\pi}$, όπου $\kappa=0,1$.