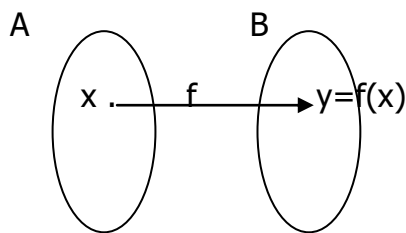


## 6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης

### Ορισμός:

**Συνάρτηση** από ένα σύνολο  $A$  σε ένα σύνολο  $B$  λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με τον οποίο κάθε στοιχείο του συνόλου  $A$  αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου  $B$ .

- Το σύνολο  $A$  λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της συνάρτησης  $f$ .
- Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα μικρά γράμματα  $f, g, h, \dots$  του λατινικού αλφαβήτου.
- Αν με μια συνάρτηση  $f$  από το  $A$  στο  $B$ , το  $x \in A$  αντιστοιχίζεται στο  $y \in B$ , τότε γράφουμε  $y = f(x)$  και διαβάζουμε « $y$  ίσον  $f$  του  $x$ ».
- Το  $f(x)$  λέγεται **τιμή της  $f$  στο  $x$** .
- Το γράμμα  $x$ , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της  $f$ , ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ
- Το  $y$ , που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο  $x$ , ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το σύνολο, που έχει στοιχεία του τις τιμές  $f(x)$  για όλα τα  $x \in A$ , λέγεται **σύνολο τιμών** της  $f$  και συμβολίζεται με  **$f(A)$** .

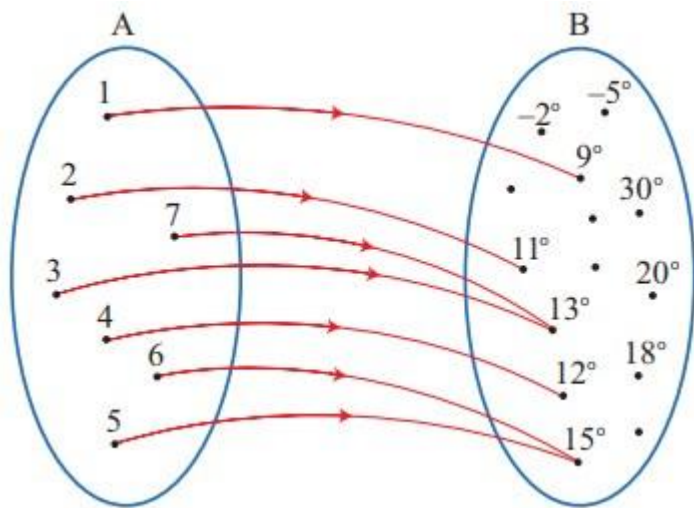


Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:  $f : A \rightarrow B$   
 $x \rightarrow f(x)$

π.χ.  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow \sqrt{x}$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Έστω  $f$  η συνάρτηση με την οποία κάθε ημέρα μιας ορισμένης εβδομάδας ενός μήνα αντιστοιχίζεται στην υψηλότερη θερμοκρασία της.



πεδίο ορισμού είναι το σύνολο

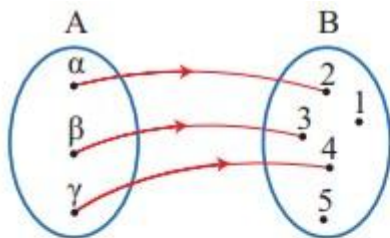
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

ενώ το σύνολο τιμών το σύνολο

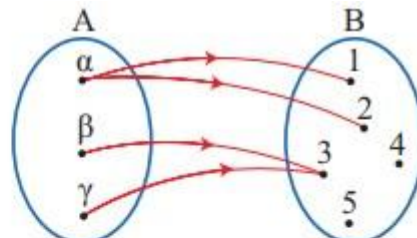
$$f(A) = \{9^\circ, 11^\circ, 12^\circ, 13^\circ, 15^\circ\} \subseteq B$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

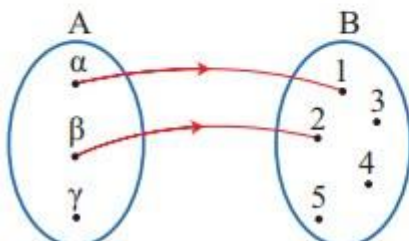
Ποια από τα παρακάτω σχήματα (βελιοδιαγράμματα) παριστάνουν συναρτήσεις;



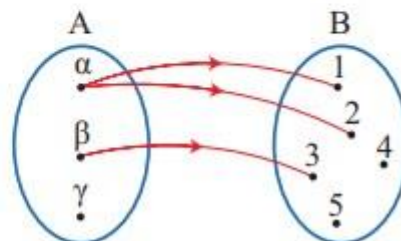
Σχήμα α'



Σχήμα β'



Σχήμα γ'



Σχήμα δ'

**ΑΣΚΗΣΗ 1:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^2-3x-1$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ , Να υπολογισθούν οι τιμές:

$$f(0)$$

$$f(-\sqrt{2})$$

$$f(a+1)$$

$$f(2x)$$

$$f(f(0))$$

**ΑΣΚΗΣΗ 2:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \alpha\nu \quad x \in (-\infty, 1] \\ 3x - 1, & \alpha\nu \quad x \in (1, +\infty) \end{cases}$

Να βρεθούν οι τιμές:

$$f(0)$$

$$f(\sqrt{2})$$

$$f(1)$$

**ΑΣΚΗΣΗ 3:**

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = x^2 + \frac{x}{2} - 1$$

$$\beta) f(x) = \frac{3x+1}{x^2-1}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{2}{5x^2-x-4}$$

$$\delta) f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$$

$$\epsilon) f(x) = \sqrt{1-2x}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \sqrt{|x|-x}$$

ζ)  $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$

η)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$

θ)  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{x-2}$

**ΑΣΚΗΣΗ 4:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - x - 2$ .

α) Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = -2$ .

β) Να βρεθούν οι ρίζες της συνάρτησης  $f$ .

γ) Να λυθεί η ανίσωση  $f(x+1) - f(2x) > x^2 - x$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 5:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & \alpha\nu \ x \leq 1 \\ 2x+1, & \alpha\nu \ x > 1 \end{cases}$

α) Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = 4$ .

β) Να λυθεί η ανίσωση  $f(x) \leq 2$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 6:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x-2}{x^3-x}$ .

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

β) Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = 1$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 7:**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = ax^2 + bx - 1$  και  $g(x) = \sqrt{x^2 - \lambda x + 1}$ .

α) Να βρεθούν οι τιμές των  $a$  και  $b$ , για τις οποίες ισχύει  $f(1) = 0$  και  $f(2) = 3$ .

β) Να βρεθούν οι τιμές του  $\lambda$ , για τις οποίες η συνάρτηση  $g$  έχει πεδίο ορισμού όλο το  $\mathbb{R}$ .

γ) Για  $a=1$ ,  $b=0$  και  $\lambda=2$ , να λυθεί η εξίσωση  $f(x) - 1 = g(x+1)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 8:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{9x^2 + a|x| + 1}{3|x| - 1}$ , για την οποία ισχύει  $f(-1) = 2$ . Να

λυθεί η ανίσωση  $f(x) \leq 2$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 9:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1, & \text{αν } -2 < x < 0 \\ ax^2 + \beta, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ .

**α)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

**β)** Να βρεθούν τα  $a, \beta$ , ώστε  $f(-1) = 2$  και  $f(1) = 3$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 10:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2ax - 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ ax^2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ .

**α)** Να βρεθεί η τιμή του  $a$ .

**β)** Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης  $f$ .

**γ)** Να βρεθεί η τιμή  $f(x^2 + 1)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 11:**

Μια βιοτεχνία παράγει ένα προϊόν, όπου το κόστος παραγωγής της μιας μονάδας είναι 10€ και η τιμή πώλησής του 15€. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρεία είναι 6000€.

**α)** Να δειχθεί ότι η συνάρτηση που εκφράζει το κέρδος από την πώληση  $x$  μονάδων του προϊόντος σε ένα μήνα είναι  $P(x) = 5x - 6000$ .

**β)** Να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να πουλήσει σε έναν μήνα, ώστε η βιοτεχνία:

**i)** να μην έχει ζημιά

**ii)** να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 300€.