Προσομοιώσεις Νευτώνειας Μηχανικής με Python. Μια διδακτική πρόταση.

[1] Π. Μεραμβελιωτάκης, [2] Ε. Ρόμπολα

[1]Φυσικός, Μεταπτυχιακός στο τμήμα Φυσικής ΕΚΠΑ
[2]MSc Πληροφορικής, Καθηγήτρια Πληροφορικής στο 5ο ΓΕΛ Βύρωνα
[1]petros.mera09@gmail.com, [2]eleni.rompola@gmail.com

Περίληψη

Η συγκεκριμένη εισήγηση παρουσιάζει μια διεπιστημονική διδακτική πρόταση για μαθητές της Θετικής Κατεύθυνσης Γενικού Λυκείου. Καθώς η αναλυτική μαθηματική επίλυση των εξισώσεων της Νευτώνειας Μηχανικής είναι πρακτικά αδύνατη για μαθητές, έχει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον η προσομοίωση των εξισώσεων αυτών μέσω προγραμματισμού. Η συγγραφή κώδικα προσομοιώσεων από τους ίδιους, δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να διερευνήσουν ελεύθερα διάφορα φυσικά φαινόμενα που σχετίζονται με τους Νόμους του Νεύτωνα και να επιβεβαιώσουν την θεωρητική γνώση που έχουν από τα αντίστοιχα μαθήματα Φυσικής. Οι προσομοιώσεις προτείνεται να γραφούν σε Python, καθώς παρέχει εύκολες στη χρήση βιβλιοθήκες για την δημιουργία διαγραμμάτων από τα δεδομένα που υπολογίζει ο κώδικας της προσομοίωσης.

Λέξεις κλειδιά: Νευτώνεια Μηχανική, Προσομοιώσεις, Δυναμικός Προγραμματισμός, Python.

1. Εισαγωγή

Στη Νευτώνεια Μηχανική απαντώνται συχνά προβλήματα τα οποία δεν επιδέχονται αναλυτικής μαθηματικής επίλυσης. Τα προβλήματα αυτά μπορούν όμως να προσομοιωθούν μέσω προγραμματισμού ώστε να γίνει εμφανής η δυναμική και η εξέλιξή τους στο χρόνο. Η παρούσα εργασία παρουσιάζει μια διεπιστημονική διδακτική πρόταση, η οποία συνδέει τους κλάδους της Φυσικής και της Πληροφορικής. Απευθύνεται σε μαθητές Λυκείου, Θετικής Κατεύθυνσης, και στόχος της είναι η υλοποίηση προσομοιώσεων Νευτώνειας Μηχανικής, ώστε να επαληθευτεί ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα. Οι προσομοιώσεις προτείνεται να γραφούν στην γλώσσα προγραμματισμού Python.

2. Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Προσομοιώσεις στη Φυσική

Η χρήση προσομοιώσεων στη διδασκαλία εννοιών και νόμων της Φυσικής έχει αποδειχθεί μέσω διαφόρων μελετών διδακτικά επωφελής (Huffmann, Goldberg, &

Michlin, 2003) (Jimoyiannis & Komis, 2001). Η μελέτη μέσω προσομοιώσεων διαφόρων φυσικών φαινομένων, τα οποία για πρακτικούς λόγους δεν μπορούν να υλοποιηθούν πειραματικά, εφοδιάζει τους μαθητές με απτά στοιχεία και εμπειρικές παρατηρήσεις και τους υποστηρίζει στην δημιουργία σωστών αντιλήψεων και εννοιών καθώς και στη διόρθωση πιθανών προϋπαρχουσών παρανοήσεων.

Ως μέσα και εργαλεία προσομοίωσης εννοούμε κυρίως ψηφιακές εφαρμογές και συστήματα και όχι υλικές πειραματικές διατάξεις. Η χρήση τέτοιων εφαρμογών αυξάνει, ποσοτικά και ποιοτικά, τον βαθμό της μαθητικής συμμετοχής στη διδασκαλία. Δραστηριοποιεί τους μαθητές αλλά και τους παρέχει δυνατότητες πειραματισμού με μεγάλο βαθμό ελευθερίας. Η συχνή και συστηματική χρήση προσομοιώσεων στη διδασκαλία της Φυσικής βελτιώνει την ικανότητα της πρόβλεψης καθώς και την ικανότητα συνδυασμού γνώσεων για την επίλυση νέων προβλημάτων (Spodniakova Pfefferova, 2015).

2.2 Διεπιστημονικότητα και Πληροφορική

Η διεπιστημονικότητα ως τρόπος οργάνωσης του Αναλυτικού Προγράμματος, διατηρεί διακριτά μαθήματα επιλογής και διάταξης της σχολικής γνώσης, αλλά επιχειρεί με ποικίλους τρόπους να συσχετίσει μεταξύ τους το περιεχόμενο των διακριτών μαθημάτων (Ματσαγγούρας Η. , 2002). Είναι μια διδακτική πραγματικότητα την οποία οι μαθητές δεν έχουν πολλές ευκαιρίες να βιώσουν, κι αυτό οφείλεται σε λόγους όπως ο εξετασιοκεντρικός χαρακτήρας του Γενικού Λυκείου, κλπ. Πιστεύουμε, ωστόσο, ότι έστω και περιστασιακά, η επιλογή ενός θέματος και η διεπιστημονική του προσέγγιση ωφελεί και τους μαθητές αλλά και τους εκπαιδευτικούς. Ο σύλλογος διδασκόντων μπορεί από απλή διοικητικού τύπου συνύπαρξη συναδέλφων να μετατραπεί σε λειτουργική ομάδα συνεργασίας, ενώ οι μαθητές κερδίζουν κατά κύριο λόγο μια ολιστική εικόνα της πραγματικότητας (Μπίκος, 2015).

Η χρήση εργαλείων Πληροφορικής στο πλαίσιο άλλων μαθημάτων είναι αρκετά συχνή, όπως για παράδειγμα η τρισδιάστατη εκτύπωση στο μάθημα της Ιστορίας (Σαρρή & Ρόμπολα, 2017), κλπ. Πιστεύουμε, όμως, ότι ο κατ' εξοχήν διεπιστημονικός συνδυασμός της Πληροφορικής με άλλες επιστήμες είναι η ενσωμάτωση δραστηριοτήτων προγραμματισμού στις φάσεις της διδασκαλίας. Στα μαθήματα των θετικών επιστημών υπάρχουν προβλήματα που δεν μπορούν να επιλυθούν με μαθηματικό τρόπο διότι απαιτούν προχωρημένες μαθηματικές γνώσεις από τους μαθητές, μπορούν όμως να προσομοιωθούν μέσω προγραμματισμού και να μελετηθούν διεξοδικά. Η δεξιότητα του προγραμματισμού είναι αναγκαίο εργαλείο για το σύνολο των θετικών επιστημών και το σημαντικότερο, ίσως, πλεονέκτημα που παρέχει είναι η ελευθερία στον πειραματισμό και τη διερεύνηση.

2.3 Μέθοδος Euler

Οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται συχνότατα στη Φυσική για να περιγράψουν διάφορα φαινόμενα. Η αριθμητική τους επίλυση, όμως, είναι συχνά δύσκολη έως αδύνατη. Μία διαφορική εξίσωση διαφέρει από μία συνήθη εξίσωση στο ότι ο άγνωστος που πρέπει να προσδιοριστεί είναι συνάρτηση και η εξίσωση περιέχει παραγώγους της συνάρτησης.

Η μέθοδος Euler (Press, Teukolsky, Vetterling, & Flannery, 2007) είναι η πιο απλή explicit μέθοδος αριθμητικής επίλυσης πρωτοτάξιων διαφορικών εξισώσεων, δεδομένων κάποιων αρχικών συνθηκών. Η μέθοδος αυτή είναι πρώτης τάξης, δηλαδή το σφάλμα ανά βήμα είναι ανάλογο του τετραγώνου του χρονικού βήματος και το συνολικό σφάλμα είναι ανάλογο του χρονικού βήματος. Έστω ότι έχουμε την ακόλουθη εξίσωση με κάποια αρχική συνθήκη x(0):

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \qquad \textbf{(1)}$$

Αφού επιλεγεί η τιμή του χρονικού βήματος Δt και οριστεί $t_n = n\Delta t$ και $x_n = x(n\Delta t)$ τότε κάθε βήμα της μεθόδου δίνεται από την σχέση:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n)\Delta t \qquad \textbf{(2)}$$

Για να μπορέσουν να επιλυθούν αριθμητικά διαφορικές εξισώσεις μεγαλύτερης τάξης, όπως η εξίσωση που προκύπτει από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα η οποία είναι δεύτερης τάξης:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x) \qquad \textbf{(3)}$$

πρέπει να μετατραπούν σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Για την περίπτωση του 2ου Νόμου του Νεύτωνα η μετατροπή γίνεται εισάγοντας μια επιπλέον συνάρτηση *u(t) = dx(t)/dt* και το σύστημα πρωτοτάξιων εξισώσεων θα είναι:

$$\begin{aligned} m\frac{du(t)}{dt} &= F(x) \\ \frac{dx(t)}{dt} &= u(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(4)}$$

2.4 Μέθοδος Ενδιαμέσων Σημείων

Η μέθοδος ενδιαμέσων σημείων (Press, Teukolsky, Vetterling, & Flannery, 2007) είναι μια αριθμητική μέθοδος που δίνει μεγαλύτερη ακρίβεια από την μέθοδο Euler. Είναι δεύτερης τάξης, δηλαδή σε κάθε βήμα το σφάλμα είναι ανάλογο του χρονικού βήματος στην τρίτη δύναμη και το συνολικό σφάλμα είναι ανάλογο του τετραγώνου του χρονικού βήματος. Για την επίλυση της εξίσωσης (1) κάθε βήμα της μεθόδου ενδιαμέσου σημείου δίνεται από την σχέση:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n + \frac{\Delta t}{2} f(x_n))\Delta t \quad \textbf{(5)}$$

Η μέθοδος αυτή παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον διότι (α) μπορεί να επεξηγηθεί πολύ καλά διαισθητικά και με χρήση απλών γεωμετρικών σχημάτων, και (β) επιτυγχάνει ικανοποιητική ακρίβεια ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη μελέτη - σε βασικό επίπεδο - συστημάτων όπως η κίνηση ενός σωματιδίου (πλανήτη) γύρω από ένα ελκτικό κέντρο (ήλιος).

3. Η Διδακτική Πρόταση

Η αυθεντική μάθηση είναι μια διαδικασία ενεργητικής διερεύνησης προβληματικών καταστάσεων (Ματσαγγούρας Η. Γ., 2007). Στις διερευνητικές στρατηγικές διδασκαλίας ο στόχος είναι συνήθως διπλός: οι μαθητές να μάθουν κάτι καινούργιο αλλά και να εξασκηθούν στην ίδια τη διερευνητική διαδικασία. Να μάθουν δηλ. πως να συλλέγουν οργανωμένα τα δεδομένα, πως να τα αναλύουν εξαντλητικά και συστηματικά, ώστε τελικά να καταλήγουν σε τεκμηριωμένα συμπεράσματα. Πρόκειται για μια στρατηγική διδασκαλίας που πιστεύουμε ότι ταιριάζει στο διδακτικό αντικείμενο της Φυσικής, η οποία είναι μια επιστήμη κατ’ εξοχήν πειραματική. Τα γενικά στάδια της διερευνητικής διαδικασίας είναι η θεωρία-υπόθεση, η πρόβλεψη, το πείραμα, το συμπέρασμα. Μεταφέροντας την διαδικασία αυτή σε σχολικό πλαίσιο, όπου ένας περιοριστικός παράγοντας είναι ο διδακτικός χρόνος, θα πρέπει να γίνει προσεκτική επιλογή του υλικού που θα δοθεί για διερεύνηση στους μαθητές, ώστε η διδασκαλία να ολοκληρωθεί σε λογικό χρόνο.

3.1 Προαπαιτούμενες Γνώσεις

Για την υλοποίηση της διδακτικής πρότασης προαπαιτούνται από τους μαθητές συγκεκριμένες γνώσεις Φυσικής, οι οποίες περιλαμβάνονται στην διδακτέα ύλη των αντίστοιχων μαθημάτων του Γενικού Λυκείου. Αναλυτικότερα, οι μαθητές θα πρέπει (α) να γνωρίζουν τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, (β) να μπορούν να ερμηνεύουν την επιτάχυνση και την ταχύτητα ως ρυθμούς μεταβολής της ταχύτητας και της θέσης αντίστοιχα. Χρήσιμο, αλλά όχι αναγκαίο, είναι να μπορούν να εκφράσουν τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για απλά συστήματα.
Για την κατανόηση της μεθόδου Euler θα ήταν χρήσιμη η γνώση των παραγώγων καθώς και της γεωμετρικής ερμηνείας τους. Ωστόσο, εάν οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί τα σχετικά κεφάλαια Μαθηματικών, ο εκπαιδευτικός μπορεί να εξηγήσει την έννοια της παραγώγου διαισθητικά, με μη-μαθηματικά επιχειρήματα.

Από προγραμματιστικής πλευράς δεν απαιτούνται εξειδικευμένες γνώσεις προγραμματισμού. Αν θεωρηθεί ότι στα μαθήματα Πληροφορικής οι μαθητές έχουν διδαχθεί τις στοιχειώδεις προγραμματιστικές δομές και έχουν γράψει απλά προγράμματα σε Python ή σε άλλες γλώσσες, τότε διαθέτουν τα απαραίτητα εφόδια. Η αλγοριθμική προσέγγιση των προσομοιώσεων στηρίζεται στην διακριτοποίηση των μαθηματικών εξισώσεων που περιγράφουν το πρόβλημα. Οι εξισώσεις αυτές καταλήγουν σε αναδρομική μορφή, όπου ένα φυσικό μέγεθος κάθε επόμενη χρονική στιγμή εξαρτάται από τις τιμές του σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Συνεπώς τα προγράμματα που θα κληθούν να γράψουν οι μαθητές εντάσσονται στην κατηγορία του Δυναμικού Προγραμματισμού (χωρίς αναδρομή) και είναι πολύ απλής μορφής.

3.2 Οργάνωση Τάξης

Προτείνεται το μάθημα να γίνει σε σχολικό εργαστήριο πληροφορικής, ώστε οι μαθητές να έχουν στη διάθεσή τους Η/Υ για να μπορέσουν αν γράψουν οι ίδιοι τον κώδικα των προσομοιώσεων. Σε κάθε Η/Υ θα πρέπει να υπάρχει εγκατεστημένη η Python καθώς και η βιβλιοθήκη SciPy από την οποία θα χρησιμοποιηθούν τα πακέτα numpy και matplotlib. Εναλλακτικά, εάν το μάθημα γίνει σε τάξη, η συγγραφή του κώδικα μπορεί να γίνει συνεργατικά και να προβάλλεται με χρήση προβολέα.

Οι μαθητές θα οργανωθούν σε μικρές ομάδες των 2-3 ατόμων. Για κάθε ομάδα θα πρέπει να υπάρχουν διαθέσιμα ένα μικρό αντικείμενο (π.χ. μια μικρή πέτρα) και νήμα, ώστε να μπορέσουν να κατασκευάσουν ένα απλό εκκρεμές. Η κατασκευή για να είναι αποτελεσματική πρέπει να έχει τα εξής χαρακτηριστικά: το αντικείμενο το οποίο θα δεθεί στο νήμα πρέπει να είναι αρκετά πιο βαρύ από το νήμα (τυπικά δύο τάξεις δύναμης είναι εύκολο να επιτευχθούν – αν η μάζα του νήματος είναι π.χ. 5 γρ τότε η μάζα του αντικειμένου θα πρέπει να είναι ανάλογες εκατοντάδες γραμμάρια π.χ. 500-600 γρ), ώστε το κέντρο μάζας του συστήματος νήμα-σώμα να βρίσκεται πολύ κοντά στο κέντρο μάζας του σώματος, έτσι ώστε το μετρούμενο μήκος από την αρχή του νήματος μέχρι το κέντρο μάζας του σώματος να είναι το μήκος l το οποίο υπεισέρχεται στις εξισώσεις. Τον ίδιο σκοπό επίσης εξυπηρετεί και η χρήση μεγάλου μήκους νήματος.

Οι μαθητές θα χρειαστούν επίσης χρονόμετρο, το οποίο μπορούν να βρουν στα εργαλεία του Η/Υ ή ίσως σε κάποια κινητή συσκευή.

3.3 Στάδια Εφαρμογής

Ψυχολογική και Γνωσιολογική Προετοιμασία

Ξεκινώντας την διδασκαλία, ο εκπαιδευτικός συζητά με τους μαθητές σχετικά με τις προσομοιώσεις στις θετικές επιστήμες. Κατά κανόνα, οι μαθητές της Θετικής Κατεύθυνσης έχουν παρακολουθήσει ενδιαφέρουσες προσομοιώσεις είτε σε κάποιο μάθημα είτε διαδικτυακά ως βίντεο. Πολύ σημαντικά πειράματα τα οποία για λόγους κόστους, ασφάλειας, χρόνου, κλπ., δεν είναι δυνατόν να διεξαχθούν πραγματικά, έχουν ως εναλλακτική υλοποίηση την προσομοίωση μέσω προγραμματισμού. Πιο συγκεκριμένα για τον τομέα της Νευτώνειας Μηχανικής, προσομοιώσεις μπορούν να γραφούν για το πολύ απλό σύστημα ενός εκκρεμούς μέχρι και για την κίνηση των πλανητών.

Από πλευράς γνωσιολογικής προετοιμασίας, οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, να ερμηνεύσουν την επιτάχυνση και την ταχύτητα ως ρυθμούς μεταβολής και, προαιρετικά, να περιγράψουν γεωμετρικά την έννοια της παραγώγου.

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα έχει καθιερωθεί ως μια από τις βασικές γνώσεις Φυσικής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και δεν έχει τεθεί υπό αμφισβήτηση. Οι μαθητές κατά κανόνα δεν μπορούν να δώσουν απάντηση στον προβληματισμό "ποιος και πως σας έπεισε ότι ισχύει ο 2ος νόμος του Νεύτωνα;". Ο στόχος, λοιπόν, είναι η επαλήθευση του νόμου αυτού μέσω απλού πειράματος. Τα αποτελέσματα του πειράματος θα διασταυρωθούν με τις προβλέψεις του 2ου νόμου του Νεύτωνα, οι οποίες θα παραχθούν με την βοήθεια προσομοιώσεων.

Διατύπωση Υποθέσεων και Καθορισμός Σχεδίου Διερεύνησης

Η υπόθεση την οποία θα επιβεβαιώσουν οι μαθητές μέσω των προσομοιώσεων είναι η ισχύς του 2ου Νόμου του Νεύτωνα. Θα διερευνηθεί αν το πείραμα παράγει τα αποτελέσματα που προβλέπει ο νόμος αυτός. Επίσης, είναι πιθανό οι μαθητές να έχουν λανθασμένες αντιλήψεις ή παρανοήσεις σχετικά με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα, οπότε και ευελπιστούμε ότι η προγραμματιστική υλοποίηση θα τις διαλευκάνει.

Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει στους μαθητές και συζητά μαζί τους την μέθοδο Euler ως προτεινόμενη μέθοδο διερεύνησης. Πρόκειται για μια αλγοριθμική μέθοδο, η οποία αφήνει ως ανοιχτά σημεία παρέμβασης και πειραματισμού τις αρχικές συνθήκες καθώς και το χρονικό βήμα. Συγκεκριμένα:

Ο αλγόριθμος του Euler επιχειρεί να βρει λύση στην εξίσωση του Νεύτωνα:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x) \tag{6}$$

Για να γίνει πιο ξεκάθαρη η διαδικασία που εκτελεί ο αλγόριθμος η εξίσωση (6) γράφεται ως δύο εξισώσεις :

$$m\frac{du(t)}{dt} = F(x),\ \frac{dx(t)}{dt} = u(t) \tag{7}$$

Η μέθοδος του Euler κάνει την φυσική υπόθεση ότι μέσα σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt η κίνηση που θα εκτελέσει το σωματίδιο θα είναι ευθύγραμμη ομαλή, οπότε αν την χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση x(t) και έχει ταχύτητα u(t) τότε μετά από χρόνο Δt η θέση του θα είναι:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + u(t)\Delta t \tag{8}$$

Η αύξηση της ταχύτητας μετά την μετατόπιση θα είναι η ίδια με την ταχύτητα που θα είχε το σώμα αν η δύναμη ήταν σταθερή και είχε τιμή F(x(t)) δηλαδή:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \frac{F(x(t))}{m}\Delta t \tag{9}$$

Για να μπορέσουμε να προβλέψουμε την τροχιά του σωματιδίου μέχρι κάποιο χρόνο T θα πρέπει να επαναλαμβάνουμε την μέθοδο που περιγράφουν οι εξισώσεις (8), (9) επαρκείς φορές. Είναι φανερό όμως ότι για να μπορέσουμε να το επιτύχουμε αυτό πρέπει οπωσδήποτε να οριστεί η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου.

Από μαθηματικής σκοπιάς θεωρούμε μία διακριτοποίηση του χρόνου, ασχολούμαστε δηλαδή με τις χρονικές στιγμές $t_n=n\Delta t$. Για ευκολία στο συμβολισμό ορίζουμε $x_n=x(n\Delta t)$ και $u_n=u(n\Delta t)$.

Οι εξισώσεις (8), (9) γράφονται πλέον ως εξής :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + u_n\Delta t \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{F(x_n)}{m}\Delta t \end{aligned} \tag{10}$$

Άρα ξεκινώντας από τις αρχικές τιμές της θέσης και της ταχύτητας x_0, u_0 και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (10), μπορούμε να υπολογίσουμε - είτε με χαρτί και μολύβι είτε προγραμματιστικά - τις τιμές θέσης και ταχύτητας στις επόμενες χρονικές στιγμές.

Η μέθοδος διερεύνησης, η οποία όπως προαναφέρθηκε, είναι η μέθοδος Euler, βασίζεται στην προγραμματιστική προσομοίωση των εξισώσεων (10), οι οποίες από πλευράς μαθηματικών είναι αναδρομικές σχέσεις. Από πλευράς προγραμματισμού, πρόκειται για ένα απλό παράδειγμα Δυναμικού Προγραμματισμού, χωρίς αναδρομή.

Συλλογή και Οργάνωση Δεδομένων

Σειρά έχει η συγγραφή του κώδικα της προσομοίωσης και η εκτέλεσή του για πολλές διαφορετικές περιπτώσεις, ώστε να συλλεγούν πειραματικά δεδομένα και να καταχωρηθούν σε κατάλληλους πίνακες. Δείγμα κώδικα σε Python είναι το εξής:

```
1.  import numpy as np
2.  from matplotlib import pyplot as plt

3.  def f(x):
4.      return - k * x


5.  k = 1.0
6.  m = 1.0

7.  dt = 0.001
8.  t_final = 10

9.  time = np.arange(0.0, t_final, dt)
10. Nt = len(time)

11. x = np.zeros(Nt)
12. u = np.zeros(Nt)

13. x[0] = 0
14. u[0] = 1.0

15. for i in range(Nt - 1):
16.     x[i + 1] = x[i] + u[i] * dt
17.     u[i + 1] = u[i] + (f(x[i]) / m) * dt

18. plt.plot(time, x, 'tab:orange', linewidth=2)
19. plt.show()
```

Εικόνα *1. Κώδικας Προσομοίωσης σε Python*

Ο κώδικας ξεκινάει (γρ.1-2) με την εισαγωγή των απαραίτητων βιβλιοθηκών. Στη συνέχεια ορίζεται η δύναμη ως συνάρτηση του x (γρ.3-4) και οι παράμετροι του συστήματος (γρ. 5-6). Στη συνέχεια (γρ. 7-8) ορίζουμε το χρονικό βήμα dt καί τον χρόνο t_final στον οποίο θα τερματίσει η προσομοίωση. Ακολουθεί (γρ.9-10) η κατασκευή του πίνακα *time* που θα περιέχει τις χρονικές στιγμές αρχίζοντας απο την τιμή 0 και καταλήγοντας στην t_final με βήμα dt και προσδιορίζεται το μέγεθος του Nt. Οι πίνακες *x, u* μήκους Nt για την θέση και την ταχύτητα αρχικοποιούνται με μηδενικά στοιχεία (γρ.11-12). Προσδιορίζονται οι αρχικές τιμές της θέσης και την ταχύτητας (γρ.13-14) και ακολουθεί η επαναληπτική διαδικασία (γρ.15-17) που υλοποιεί προγραμματιστικά τις εξισώσεις (10) και η οποία αποθηκεύει στους πίνακες *x* και *u* τις διαδοχικές τιμές θέσης και ταχύτητας. Τελικά, με χρήση του πακέτου matplotlib ζωγραφίζεται το διάγραμμα x-t (γρ.18-19).

Εάν οι μαθητές διαθέτουν στοιχειώδη προγραμματιστική εμπειρία, μπορούν με μικρή βοήθεια από τον εκπαιδευτικό να γράψουν οι ίδιοι τον παραπάνω κώδικα. Διαφορετικά, η συγγραφή του κώδικα μπορεί να γίνει συνεργατικά από όλους και να προβάλλεται με χρήση προβολέα ώστε οι μαθητές να τον πληκτρολογούν στον δικό τους Η/Υ.

Αφού ολοκληρωθεί η συγγραφή του κώδικα, ο εκπαιδευτικός παρακινεί τους μαθητές να εκτελέσουν την προσομοίωση για τις εξής τουλάχιστον περιπτώσεις:

(α) μηδενική δύναμη και μη μηδενική αρχική ταχύτητα,

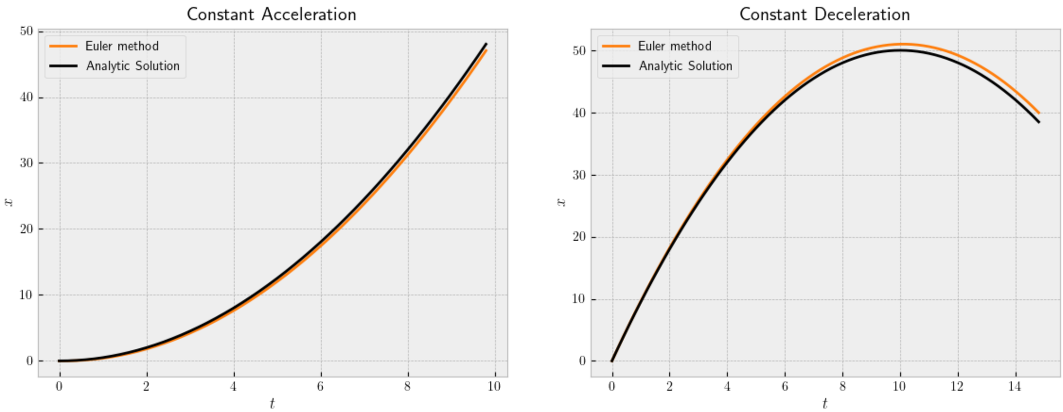
(β) σταθερή δύναμη και μηδενική ταχύτητα,

(γ) σταθερή αρνητική δύναμη και θετική αρχική ταχύτητα.

Αναλυτική Επεξεργασία Δεδομένων

Τα δεδομένα που θα συλλεγούν είναι οι τιμές των πινάκων x και u. Η επεξεργασία των δεδομένων αυτών θα γίνει μέσω της κατασκευής των γραφημάτων x-t και u-t, τα οποία αφού δημιουργηθούν, θα συγκριθούν με τα αντίστοιχα θεωρητικά γραφήματα του 2ου Νόμου του Νεύτωνα. Τα θεωρητικά γραφήματα είναι γνωστά στους μαθητές, καθώς και οι τρεις παραπάνω περιπτώσεις έχουν αναλυθεί διεξοδικά στη Φυσική των πρώτων τάξεων του Λυκείου, τόσο ως θεωρία όσο και μέσω ασκήσεων.

Εάν τα πειραματικά γραφήματα, δηλ. τα γραφήματα που προήλθαν από τα δεδομένα της προσομοίωσης, προσεγγίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό τα θεωρητικά γραφήματα τα οποία προβλέπει ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα, τότε οι μαθητές είναι σε θέση να επαληθεύσουν την αρχική τους υπόθεση και να επιβεβαιώσουν την ισχύ του νόμου.



Εικόνα 2. *Διαγράμματα Σύγκρισης Προσομοίωσης (πορτοκαλί) και Θεωρίας (μαύρο).*

Υπέρβαση Δεδομένων – Εύρεση Αναλογιών

Στην φάση αυτή γίνεται μια προσπάθεια να υπερβούν οι μαθητές την απλή κατανόηση των όσων έμαθαν μέχρι τώρα, μέσω ενός νέου παραδείγματος, ελαφρώς διαφορετικού από τα προηγούμενα, στο οποίο όμως μπορούν να εφαρμόσουν την ίδια μέθοδο προσομοίωσης. Πρόκειται για το απλό εκκρεμές. Η μορφή του 2ου Νόμου του Νεύτωνα προκύπτει για το σύστημα αυτό είναι η ακόλουθη:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\eta\mu\theta \tag{11}$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας και l το μήκος του σχοινιού. Η απόδειξη της εξίσωσης αυτής περιέχεται στο παράρτημα Α. Παρατηρούμε ότι στο σύστημα αυτό η "θέση" του σωματιδίου είναι η γωνία που σχηματίζει το σχοινί σε σχέση με την θέση ισορροπίας του. Οι εξισώσεις (10) θα γίνουν για το σύστημα αυτό:

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + u_n \Delta t \\ u_{n+1} &= u_n - \frac{g}{l} \eta\mu\theta_n \Delta t \end{aligned} \quad \textbf{(12)}$$

Οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν με μια πέτρα κι ένα σχοινί ένα απλό εκκρεμές. Το φυσικό μέγεθος του οποίου η μέτρηση προτείνεται είναι η περίοδος του εκκρεμούς. Η μέτρηση αυτή μπορεί να γίνει αφήνοντας το εκκρεμές από μία αρχική γωνία με μηδενική ταχύτητα. Στη συνέχεια, μετρώνται δέκα περίοδοι του εκκρεμούς με ένα χρονόμετρο και υπολογίζεται η μέση περίοδος της ταλάντωσης.

Ακολουθεί η επαλήθευση του αποτελέσματος μέσω της προγραμματιστικής προσομοίωσης. Ο κώδικας (εικόνα 1) τροποποιείται ώστε να υπολογίζει τις εξισώσεις (12), όπως φαίνεται στην εικόνα 3. Ουσιαστικά αλλάζει μόνο ο ορισμός της συνάρτησης F(x) (γρ. 4-5) και οι αρχικές συνθήκες (γρ. 14). Οι μαθητές αφού εισάγουν τις παραμέτρους του συστήματος (μήκος νήματος, αρχική γωνία) στην προσομοίωση, χρησιμοποιούν τα αριθμητικά δεδομένα για να υπολογίσουν την περίοδο.

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib import rc

def F(x):
    return - k * np.sin(x)

k = 9.8 / 1.03
m = 1.0

dt = 0.001     # Time step
t_final = 10  # Simulate up to t_final

time = np.arange(0.0, t_final, dt)
Nt = len(time)

x = np.zeros(Nt)
u = np.zeros(Nt)

x[0], u[0] = [0, 1.5*np.sqrt(2*k)]

for i in range(len(time) - 1):
    u[i + 1] = u[i] + (F(x[i]) / m) * dt
    x[i + 1] = x[i] + u[i] * dt

freq = np.sqrt(k)

rc('text', usetex=True)  # Enable LaTeX rendering for plots
plt.style.use('bmh')
plt.plot(time, np.mod(x,2*np.pi), 'tab:orange', label='Euler method ')
#plt.plot(time, x[0]* np.cos(freq*time), 'k' , label='Small initial angle approx')
plt.title('Large initial speed $x mod 2 \pi $')
#plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Εικόνα 3. *Κώδικας προσομοίωσης εκκρεμούς με την μέθοδο Euler.*

Στη συνέχεια, οι μαθητές καλούνται να εμβαθύνουν στον κώδικα της προσομοίωσης. Ο εκπαιδευτικός προτείνει την εκτέλεση της προσομοίωσης για τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις, και βέβαια αφήνει ελεύθερους τους μαθητές να πειραματιστούν περαιτέρω:

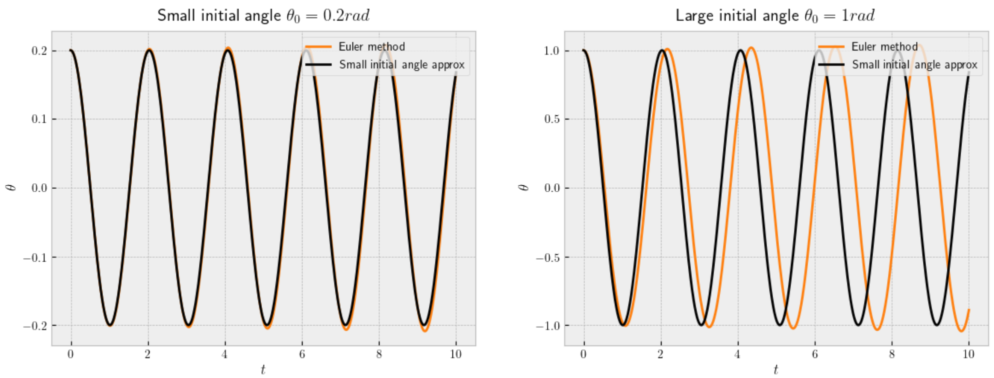
(α) μικρή αρχική γωνία $\theta_0 < 0.3$ rad και μηδενική αρχική ταχύτητα u_0

(β) μεγάλη αρχική γωνία $\theta_0 \sim 1$ rad και μηδενική αρχική ταχύτητα u_0

(γ) αρχική γωνία $\theta_0 = 0$ και μεγάλη αρχική ταχύτητα u_0.

Τα δεδομένα που συλλέγονται από κάθε προσομοίωση είναι οι τιμές του πίνακα x (οι οποίες εκφράζουν την γωνία θ σε κάθε θέση), από τις οποίες μπορούν να κατασκευαστούν γραφήματα θ-t και με μικρές προσθήκες στον κώδικα να υπολογιστεί η περίοδος της κίνησης.

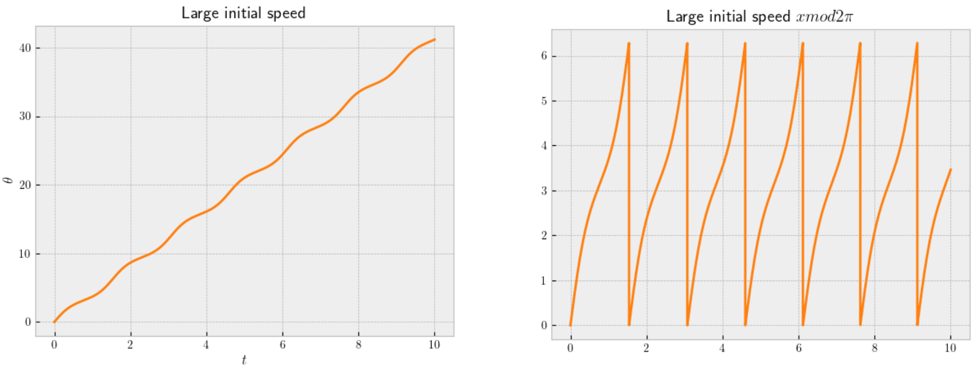
Το απλό εκκρεμές και συγκεκριμένα η περίπτωση όπου η μέγιστη γωνία ταλάντωσης είναι μικρή εκφυλίζεται στο σύστημα του απλού αρμονικού ταλαντωτή σταθεράς k=mg/l που αντιμετωπίζεται αναλυτικά στην Φυσική της Γ Λυκείου. Οι μαθητές γνωρίζουν τις αναλυτικές εκφράσεις για την θέση και την περίοδο του εκκρεμούς σε αυτή την περίπτωση, άρα μπορούν μέσω της επεξεργασίας των δεδομένων που θα προκύψουν από τις προσομοιώσεις (α) και (β) να διερευνήσουν την ισχύ της παραπάνω θεωρητικής γνώσης. Η σύγκριση των δεδομένων θα γίνει οπτικά σε ένα γράφημα το οποίο θα περιέχει τα δεδομένα της προσομοίωσης και την αναλυτική θεωρητική πρόβλεψη στην παραπάνω περίπτωση. Ο εκπαιδευτικός αναμένει οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι στην περίπτωση (α) η θεωρητική μορφή της αρμονικής ταλάντωσης συμπίπτει με την μορφή του γραφήματος της προσομοίωσης.



Εικόνα 4. *Διαγράμματα θ-t για τις προσομοιώσεις (α) και (β).*

Στην περίπτωση (β) όμως θα πρέπει να παρατηρήσουν σημαντική διαφοροποίηση. Υπάρχει απόκλιση από την θεωρητική πρόβλεψη άρα η αρχική προσέγγιση μικρών γωνιών παύει να ισχύει.

Στην (γ) περίπτωση για αρκετά μεγάλες αρχικές ταχύτητες θα παρατηρηθεί μεγάλη αλλαγή στην συμπεριφορά της θέσης.



Εικόνα 5. *Διάγραμμα θ-t για την προσομοίωση (γ)*

Η ερμηνεία του γραφήματος για αυτή την περίπτωση στηρίζεται στην παραδοχή ότι η θέση του εκκρεμούς περιγράφεται από την γωνία σε σχέση με την θέση ισορροπίας. Το εκκρεμές βρίσκεται στο ίδιο φυσικό σημείο για γωνίες οι οποίες διαφέρουν κατά 2π, άρα υπολογίζοντας το υπόλοιπο της διαίρεσης της γωνίας με 2π και χρησιμοποιώντας το αντί της ίδιας της γωνίας, προκύπτει το δεύτερο γράφημα της εικόνας 5.

Εδώ ο εκπαιδευτικός επιθυμεί να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι το εκκρεμές κάνει κύκλους. Πόσο μεγάλη τιμή θα δοθεί στην αρχική ταχύτητα αφήνεται ως άσκηση στους μαθητές, καθώς διαθέτουν τις αναγκαίες γνώσεις. Γενικά θα πρέπει να ισχύει

$$u_0 > \sqrt{\frac{2g}{l}} \tag{13}$$

Αναφέρθηκε νωρίτερα ότι με μικρές προσθήκες στον κώδικα της προσομοίωσης, μπορεί να υπολογιστεί η περίοδος του εκκρεμούς. Ακολουθεί ένα δείγμα κώδικα, το οποίο μπορεί να προστεθεί στον κώδικα της εικόνας 3.

```
period = []

for i in range(len(time) - 1):
    if x[i + 1] <= 0 and x[i] > 0:
        period.append(time[i + 1])

T = 0
for i in range(len(period) - 1):
    T = T + period[i + 1] - period[i]

print(T / (len(period) - 1))
```

Εικόνα 6. *Κώδικας για τον υπολογισμό της περιόδου*

Εφαρμογές

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή είναι η περιγραφή της κίνησης ενός πλανήτη γύρω από ένα ελκτικό κέντρο (ήλιος). Θα περιοριστούμε στην μελέτη της κίνησης στο επίπεδο. Ο εκπαιδευτικός συγκεντρώνει τις γενικότερες απόψεις και τις όποιες γνώσεις των μαθητών για την κίνηση των πλανητών και καταγράφει τις σχετικές εξισώσεις. Οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί τις εξισώσεις αυτές στο πλαίσιο κάποιου μαθήματος, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι πρόκειται για εξισώσεις που αδυνατούν να κατανοήσουν. Αντίθετα, πρόκειται για την περιγραφή σε μαθηματική γλώσσα ενός πολύ ενδιαφέροντος φυσικού φαινομένου. Η δύναμη που ασκείται στον πλανήτη έχει μέτρο

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \textbf{(14)}$$

και φορά από τον πλανήτη προς το ελκτικό κέντρο. Το G είναι η παγκόσμια σταθερά έλξης και m_1, m_2 είναι οι μάζες του πλανήτη και του ελκτικού κέντρου αντίστοιχα. Για ευκολία στην περαιτέρω μελέτη επιλέγουμε τις μάζες έτσι ώστε να ισχύει *$Gm_2=1$.* Αναλύοντας την δύναμη στους άξονες x και y προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \end{aligned} \quad \textbf{(15)}$$

οι οποίες και εκφράζουν τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα. Οι μαθητές αφού γράψουν τον κώδικα της προσομοίωσης, μπορούν να πειραματιστούν και να εξάγουν ενδιαφέροντα συμπεράσματα όπως, για παράδειγμα, ότι για συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες η τροχιά μπορεί να είναι κλειστή ή ανοιχτή (ο πλανήτης να απομακρύνεται από τον ήλιο), κλπ. Ακολουθεί ενδεικτικός κώδικας σε Python.

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

def fx(u, v):
    return - u / np.power(u*u + v*v, 3 / 2)

def fy(u, v):
    return - v / np.power(u*u + v*v, 3 / 2)

dt = 0.01
t_final = 10

time = np.arange(0.0, t_final, dt)
Nt = len(time)

x = np.zeros(Nt)
u_x = np.zeros(Nt)

y = np.zeros(Nt)
u_y = np.zeros(Nt)

x[0], y[0], u_x[0], u_y[0] = [1, 0, 0, 1]

for i in range(Nt - 1):
    kx = 0.5 * dt * fx(x[i], y[i])
    ky = 0.5 * dt * fy(x[i], y[i])

    u_x[i + 1] = u_x[i] + dt * fx(x[i]+0.5*dt*u_x[i], y[i]+0.5*dt*u_y[i])
    x[i + 1] = x[i] + (u_x[i]+kx) * dt

    u_y[i + 1] = u_y[i] + dt * fy(x[i]+0.5*dt*u_x[i], y[i]+0.5*dt*u_y[i])
    y[i + 1] = y[i] + (u_y[i]+ky) * dt

plt.style.use('bmh')
plt.plot(x, y, 'tab:orange')
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel(r"$y$ ")
plt.grid(True)
plt.show()
```

Εικόνα 7. *Κώδικας προσομοίωσης κίνησης πλανητών*

Ανακεφαλαίωση – Μαθησιακή & Μεταγνωστική Αξιολόγηση

Η διδασκαλία ολοκληρώνεται με ανακεφαλαίωση και μαθησιακή και μεταγνωστική αξιολόγηση. Είναι επιθυμητό οι μαθητές να μπορούν να περιγράψουν την διερευνητική διαδικασία και την αλγοριθμική λογική του κώδικα, να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους στις παραμέτρους των προσομοιώσεων και να εξηγήσουν τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

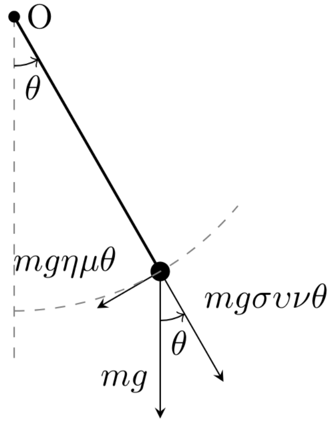
4. Συμπεράσματα

Στη Νευτώνεια Μηχανική απαντώνται συχνά προβλήματα τα οποία δεν επιδέχονται αναλυτικής μαθηματικής επίλυσης. Τα προβλήματα αυτά μπορούν όμως να προσομοιωθούν μέσω προγραμματισμού ώστε να γίνει εμφανής η δυναμική και η εξέλιξή τους στο χρόνο. Στην παρούσα διδακτική πρόταση αρχικά χρησιμοποιούνται γνωστά συστήματα, όπως για παράδειγμα το απλό εκκρεμές, σαν κατάλληλα σημεία εκκίνησης τα οποία δεν επιφορτίζουν με αβεβαιότητα στους μαθητές, μπορούν να κατασκευαστούν με απλά υλικά, αλλά και τα οποία έχουν ενδιαφέρουσες και άξιες μελέτης ιδιότητες. Τελικά, όταν ολοκληρωθούν οι διαδικασίες του προγραμματισμού και της μελέτης των προσομοιώσεων, θα έχει αποδειχτεί πως πολύ πιο σύνθετα και ενδιαφέρονται φαινόμενα, όπως η κίνηση των πλανητών, προσεγγίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Γράφοντας οι μαθητές τον κώδικα της προσομοίωσης (α) επιβεβαιώνουν τις υπάρχουσες γνώσεις φυσικής σχετικά με το πρόβλημα, (β) μπορούν να εξερευνήσουν την επίδραση διαφόρων παραμέτρων (π.χ. των αρχικών συνθηκών, κλπ), κάτι το οποίο είναι πολύ σημαντικό στη Φυσική και συνήθως δύσκολο να μελετηθεί με πραγματικό πείραμα, (γ) μπορούν να εφαρμόσουν την ερευνητική διαδικασία της Φυσικής (θεωρία-υπόθεση, πρόβλεψη, πείραμα, συμπέρασμα) και να συμπληρώσουν μέσα από διερευνητικές και ομαδοσυνεργατικές διαδικασίες τις γνώσεις τους, (δ) μπορούν να εξερευνήσουν φαινόμενα των οποίων η μελέτη σε πείραμα καθίσταται δύσκολη εξαιτίας πρακτικών περιορισμών (χρήματα, χρόνος, πολυπλοκότητα), και τέλος (ε) πείθονται πως η δεξιότητα του προγραμματισμού είναι για πολλές θετικές επιστήμες ένα απαραίτητο εφόδιο.

Η παρούσα διδακτική πρόταση παρουσιάστηκε σε μαθητές Γ τάξης - Θετικής Κατεύθυνσης του 5ου ΓΕΛ Βύρωνα και έτυχε θετικής αποδοχής.

5. Παράρτημα Α: Απόδειξη της εξίσωσης του απλού εκκρεμούς



Εικόνα 8. *Δυνάμεις που ασκούνται στο απλό εκκρεμές*

Έστω ότι έχουμε την διάταξη που φαίνεται στην εικόνα όπου ένα σώμα μάζας m είναι κρεμασμένο από ένα νήμα μήκους l. Η ροπή που ασκεί το βάρος του σώματος ως προς το σημείο περιστροφής Ο είναι:

$$T = -mgl\eta\mu\theta \quad \textbf{(16)}$$

Η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς το Ο είναι:

$$I = ml^2 \quad \textbf{(17)}$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση του Νόμου του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} Ia_\theta &= T \\ ml^2 a_\theta &= -mgl\eta\mu\theta \\ a_\theta &= -\frac{g}{l}\eta\mu\theta \end{aligned} \quad \textbf{(18)}$$

Αναφορές

Huffmann, D., Goldberg, F., & Michlin, M. (2003). Using computers to create constructivist learning environments: impact on pedagogy and achievement. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching , 22* (2), σσ. 151-168.

Jimoyiannis, A., & Komis, V. (2001). Computer simulations in Physics teaching and learning: a case study on students' understanding of trajectory motion. *Computers & Education , 36* (2), σσ. 183-204.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press.

Spodniakova Pfefferova, M. (2015). Computer Simulations and their Influence on Students' Understanding on Oscillatory Motion. *Informatics in Education , 14* (2), σσ. 279-289.

Ματσαγγούρας, Η. Γ. (2007). *Στρατηγικές Διδασκαλίας*. Αθήνα: Gutenberg.

Ματσαγγούρας, Η. (2002). Διεπιστημονικότητα, διαθεματικότητα και ενιαιοποίηση στα νέα Προγράμματα Σπουδών:Τρόποι οργάνωσης της σχολικής γνώσης. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων* (Τευχ. 7), σσ. 19-36.

Μπίκος, Κ. Γ. (2015). *Η διεπιστημονικότητα στην εκπαιδευτική πράξη.* Ανάκτηση 7 31, 2020, από http://ejournals.lib.auth.gr/culres/article/download/4640/4738

Σαρρή Γ., & Ρόμπολα Ε. (2017). Ο Φάρος της Αλεξάνδρειας στη ψηφιακή εποχή: Αξιοποίηση των ΤΠΕ και της τρισδιάστατης εκτύπωσης στο μάθημα της Ιστορίας. *9ο συνέδριο Η Πληροφορική στην Εκπαίδευση*, Αθήνα.

Abstract

This paper presents an interdisciplinary educational proposal for high school students. As the analytical, mathematical solution of Newtonian Mechanics equations by high school students is practically impossible, we consider simulating these equations via programming to be of great interest. By developing the simulations' code themselves, the students have the opportunity to explore the various natural phenomena that are governed by Newton's Laws freely as well as confirm any related theoritecal knowledge they have obtained from their Physics courses. We suggest the code be written in Python, as it offers easy-to-use libraries for generating diagrams using data calculated by the simulation's code.

Keywords: Newtonian Mechanics, Simulations, Dynamic Programming, Python..