

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ ii) $2\sigma\upsilon\nu 3x = 1$ [Λύση ►](#)
2. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $\epsilon\phi x = 1$ ii) $\sigma\phi 3x + \sqrt{3} = 0$ [Λύση ►](#)
3. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $2\eta\mu 3x = -\sqrt{3}$ ii) $2\sigma\upsilon\nu \frac{5x}{4} + 1 = 0$ [Λύση ►](#)
4. Να λυθούν οι εξισώσεις:
i) $\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu x$ (ii) $\eta\mu 5x + \sigma\upsilon\nu 2x = 0$ [Λύση ►](#)
5. Να λυθεί η εξίσωση $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$. [Λύση ►](#)
6. Να λυθεί η εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu x + 1$. [Λύση ►](#)
7. Να λυθεί η εξίσωση $\epsilon\phi^4 x = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 1$. [Λύση ►](#)
8. Να λυθούν στο διάστημα $[0, 2\pi]$ οι εξισώσεις:
(i) $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ (ii) $2\sigma\upsilon\nu 3x = 1$ [Λύση ►](#)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ ii) $2\sigma\upsilon\nu 3x = 1$

Λύση

(i) Είναι $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$ $\eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

$\eta\mu x = \eta\mu \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi + \theta \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

(ii) Είναι $2\sigma\upsilon\nu 3x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$ $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 3x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad \Delta\eta\lambda. \begin{cases} x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \\ \text{ή} \\ x = \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{9} \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $\epsilon\phi x = 1$ ii) $\sigma\phi 3x + \sqrt{3} = 0$

Λύση

(i) Είναι $\epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$\epsilon\phi x = \epsilon\phi \theta$
 $\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$

(ii) Είναι $\sigma\phi 3x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sigma\phi 3x = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sigma\phi 3x = -\sigma\phi \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \sigma\phi 3x = \sigma\phi \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 3x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$\sigma\phi x = \sigma\phi \theta \Leftrightarrow$
 $x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$

Άρα $x = \frac{\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{18}, \kappa \in \mathbb{Z}$

[◀ Εκφωνήσεις](#)

3. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $2\eta\mu 3x = -\sqrt{3}$ ii) $2\sigma\upsilon\nu \frac{5x}{4} + 1 = 0$

Λύση

(i) Είναι $2\eta\mu 3x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \eta\mu 3x = -\eta\mu \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \eta\mu 3x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$-\eta\mu \theta = \eta\mu(-\theta)$

Λυμένες Ασκήσεις στις Τριγωνομετρικές Εξισώσεις - Β' Λυκείου

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \text{ή} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9} \\ \text{ή} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{4\pi}{9} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(ii) Είναι $2\sigma\upsilon\nu\frac{5x}{4} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\frac{5x}{4} = -1$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{5x}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{5x}{4} = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{5x}{4} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$-\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta)$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{5x}{4} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x}{4} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \frac{5x}{4} = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8k\pi}{5} + \frac{8\pi}{15} \\ \text{ή} \\ x = \frac{8k\pi}{5} - \frac{8\pi}{15} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu x$ (ii) $\eta\mu 5x + \sigma\upsilon\nu 2x = 0$

Λύση

(i) Είναι $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu x \Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \eta \quad \kappa \in Z \\ 3x - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ \eta \quad , \kappa \in Z \\ 3x - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \\ \eta \quad , \kappa \in Z \\ 2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \end{cases}$

5. Να λυθεί η εξίσωση $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.

Λύση

Έχουμε διαδοχικά: $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 - 2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x (\eta\mu x - 1) + \eta\mu x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\eta\mu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x - 1 = 0 \text{ ή } 2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$$

Κοινό παράγοντα το $2\sigma\upsilon\nu x$

Κοινό παράγοντα το $\eta\mu x - 1$

Γνωρίζουμε ότι:
 $-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$

- $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

- $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

◀ Εκφωνήσεις

6. Να λυθεί η εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^2x = \eta\mu x + 1$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } 2\sigma\upsilon\nu^2x = \eta\mu x + 1 &\Leftrightarrow 2(1 - \eta\mu^2x) = \eta\mu x + 1 \\ &\Leftrightarrow 2 - 2\eta\mu^2x = \eta\mu x + 1 \\ &\Leftrightarrow -2\eta\mu^2x - \eta\mu x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\eta\mu^2x + \eta\mu x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1$, έχουμε $\sigma\upsilon\nu^2x = 1 - \eta\mu^2x$

Λύση εξίσωσης με αντικατάσταση (βοηθητικός άγνωστος)

Θέτουμε $\eta\mu x = t$ (1) με $-1 \leq t \leq 1$

οπότε η εξίσωση γίνεται: $2t^2 + t - 1 = 0$ (2)

Η (2) έχει λύσεις $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -1$ οπότε από (1) έχουμε:

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \eta\mu x = -1 \quad \text{οπότε}$$

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 \\ t_1, t_2 &= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

[◀ Εκφωνήσεις](#)

7. Να λυθεί η εξίσωση $\varepsilon\varphi^4 x = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 1$.

Λύση

Πρέπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Έχουμε διαδοχικά: $\varepsilon\varphi^4 x = 2 \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 1$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^4 x = 2(\varepsilon\varphi^2 x + 1) + 1$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^4 x - 2\varepsilon\varphi^2 x - 3 = 0$

Θέτουμε $\varepsilon\varphi^2 x = \omega$ (1) οπότε $\omega^2 - 2\omega - 3 = 0$ (2)

Η (2) έχει ρίζες $\omega_1 = 3, \omega_2 = -1$ οπότε από (1) έχουμε:

$\varepsilon\varphi^2 x = 3$ ή $\varepsilon\varphi^2 x = -1$ (αδύνατη)

Άρα $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ ή $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3}$ ή $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Οι λύσεις που βρήκαμε είναι δεκτές.

Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \varepsilon\varphi^2 x + 1$$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

$$\omega_1, \omega_2 = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$\varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, άρα

$$-\sqrt{3} = -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} = \varepsilon\varphi \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \theta$

$\Leftrightarrow x = \kappa\eta + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$

8. Να λυθούν στο διάστημα $[0, 2\pi]$ οι εξισώσεις:

(i) $\epsilon\varphi x = \sqrt{3}$ (ii) $2\sigma\upsilon\nu 3x = 1$

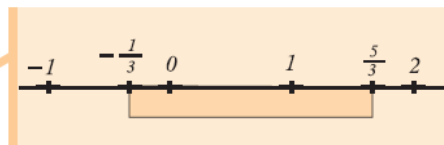
Λύση

(i) Είναι $\epsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\varphi x = \epsilon\varphi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Όμως πρέπει $x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa + \frac{1}{3} \leq 2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq \kappa \leq 2 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq \kappa \leq \frac{5}{3}$

Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$, οπότε $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$.



- για $\kappa = 0$ είναι $x = \frac{\pi}{3}$

- για $\kappa = 1$ είναι $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

(ii) Είναι $2\sigma\upsilon\nu 3x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 3x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \\ \text{ή} \\ x = \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{9} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Λυμένες Ασκήσεις στις Τριγωνομετρικές Εξισώσεις - Β' Λυκείου

Αλλά πρέπει $x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2\pi$ (1)

- για $x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$ η (1) γίνεται: $0 \leq \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \leq 2\pi$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{2\kappa}{3} + \frac{1}{9} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{9} \leq \frac{2\kappa}{3} \leq \frac{17}{9}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq 2\kappa \leq \frac{17}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq \kappa \leq \frac{17}{6}$$

και αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$ είναι $\kappa = 0, 1, 2$ οπότε

$$x = \frac{\pi}{9} \quad \text{ή} \quad x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} = \frac{7\pi}{9} \quad \text{ή} \quad x = \frac{2 \cdot 2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} = \frac{13\pi}{9}$$

- για $x = \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{9}$ η (1) γίνεται: $0 \leq \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{9} \leq 2\pi$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{2\kappa}{3} - \frac{1}{9} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{2\kappa}{3} \leq \frac{19}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq 2\kappa \leq \frac{19}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \kappa \leq \frac{19}{6}$$

και αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$ είναι $\kappa = 1, 2, 3$ οπότε

$$x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{9} = \frac{5\pi}{9} \quad \text{ή} \quad x = \frac{2 \cdot 2\pi}{3} - \frac{\pi}{9} = \frac{11\pi}{9} \quad \text{ή} \quad x = \frac{2 \cdot 3\pi}{3} - \frac{\pi}{9} = \frac{17\pi}{9}$$

[◀ Εκφωνήσεις](#)