1.3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Τριγωνομετρικές εξισώσεις λέγονται οι εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος **x** εμφανίζεται σε κάποιον τριγωνομετρικό αριθμό(ημίτονο , συνημίτονο, εφαπτομένη ή συνεφαπτομένη).

Για να λύσουμε μια τριγωνομετρική εξίσωση θα πρέπει να την φέρουμε σε μια από τις παρακάτω μορφές:

Μορφή Εξίσωσης	Τύποι Λύσεων
$\eta\mu x = \eta\mu\alpha$	$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \alpha \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \alpha \end{cases}$ $\mu\varepsilon\ \kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\alpha$	$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \alpha \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi - \alpha \end{cases}$ $\mu\varepsilon\ \kappa \in \mathbb{Z}$
$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\alpha$	$x = \kappa\pi + \alpha\,,\ \ \mu\varepsilon\ \kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\alpha$	$x = \kappa\pi + \alpha\,,\ \ \mu\varepsilon\ \kappa \in \mathbb{Z}$

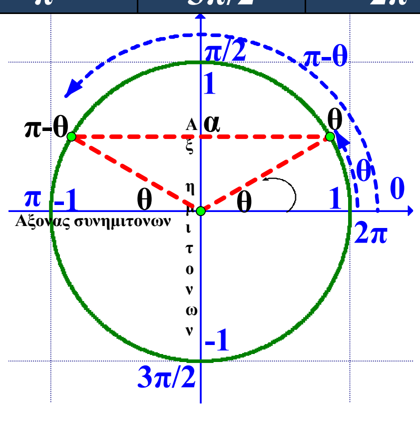
Καθένας από τους προηγούμενους τύπους λύσεων δίνει **άπειρες λύσεις**

Διαδικασία εύρεση τιμών ημιτόνου.

	0 rad	π/6	π/4	π/3	π/2
γράψτε	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$
Βάλτε κάτω από την ρίζα τα 0, 1, 2, 3, 4.					
Τιμές του ημx	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$

Οι τιμές του συνημίτονου είναι ανάποδα ,
της εφαπτόμενης με διαίρεση και της συνεφαπτομένης ανάποδα.

	0^o 0 rad	30^o π/6	45^o π/4	60^o π/3	90^o π/2	180^o π	270^o 3π/2	360^o 2π
ημx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1			
συνx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0			
εφx	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–			
σφx	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{0}{1} = 0$			



Οι προηγούμενοι τύποι λύσεων ισχύουν όταν το α δίνεται σε ακτίνα (δηλαδή είναι μια σχέση του π). Όταν δίνονται μοίρες μ^o τότε :

$1^{ον}$) Μετατρέπουμε τις μοίρες μ^o σε ακτίνα α βάση του γνωστού τύπου

$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu^\circ}{180^\circ} \Leftrightarrow \alpha=\frac{\mu^\circ \pi}{180^\circ} \quad \text{ή}$$

$2^{ον}$) Οι προηγούμενοι τύποι παίρνουν αντίστοιχα τις μορφές

$$\eta\mu x=\eta\mu\mu^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x=360^\circ\kappa+\mu^\circ \\ \quad \text{ή} \\ x=360^\circ\kappa+180^\circ-\mu^\circ \end{cases} \text{ με } \kappa\in\mathbb{Z},\ \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\mu^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x=360^\circ\kappa+\mu^\circ \\ \quad \text{ή} \\ x=360^\circ\kappa-\mu \end{cases}$$

με $\kappa\in\mathbb{Z}$, $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\mu^o$ ή $\sigma\varphi x=\sigma\varphi\mu^o \Leftrightarrow x=180^o\kappa+\mu^o$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$.

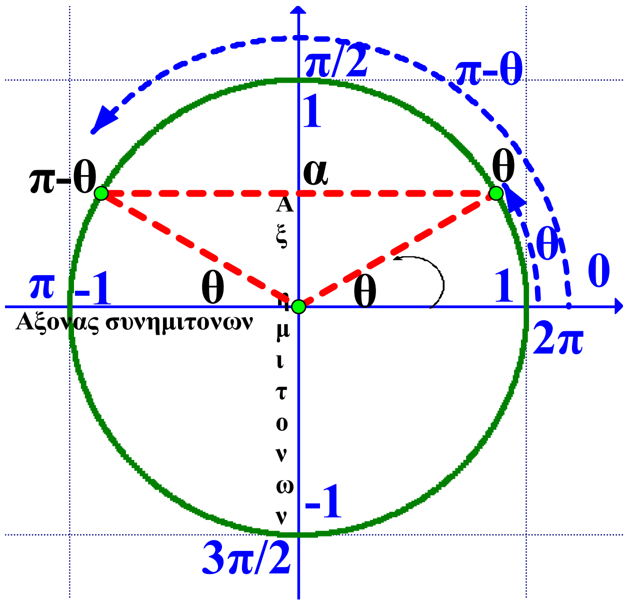
Δηλαδή αντικαθιστούμε το 2π με 360^o και το π με 180^o.

1. Η εξίσωση ημx = α

- Αν το **α>1 ή α<-1** **<u>δεν έχει λύσεις</u>** αφού $-1\le\eta\mu x\le 1$.
- Αν $-1\le\alpha\le 1$ τότε έχει λύσεις.

Με τον τριγωνομετρικό κύκλο :

Αν το **α** θετικός και μικρότερος του 1.
Βάζουμε στο άξονα των ημιτόνων (ψ΄ψ), τη θετική τιμή **α** και φέρουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα των συνημίτονων (χ΄χ) η όποια τέμνει τον κύκλο στο **θ** και το **π-θ** .
Άρα από το διπλανό σχήμα φαίνεται ότι το **ημx** παίρνει την τιμή **α** δυο φορές στο **x=θ** και το **x=π-θ**
Οπότε στον τριγωνομετρικό κύκλο στο διάστημα **[0,2π]**(*μιας περιόδου Τ=2π*) η εξίσωση $\eta\mu x=\alpha$
επαληθεύεται από το **x=θ** και το **x=π-θ** αν λοιπόν προσθέσουμε το **2κπ** (*κ περιόδους, κύκλους*) **έχουμε**



$$\eta\mu x=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\theta \\ \quad \text{ή} \\ x=2\kappa\pi+\pi-\theta \end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Ομοιοτρόπως αν το **α αρνητικός** και μεγαλύτερος του -1.

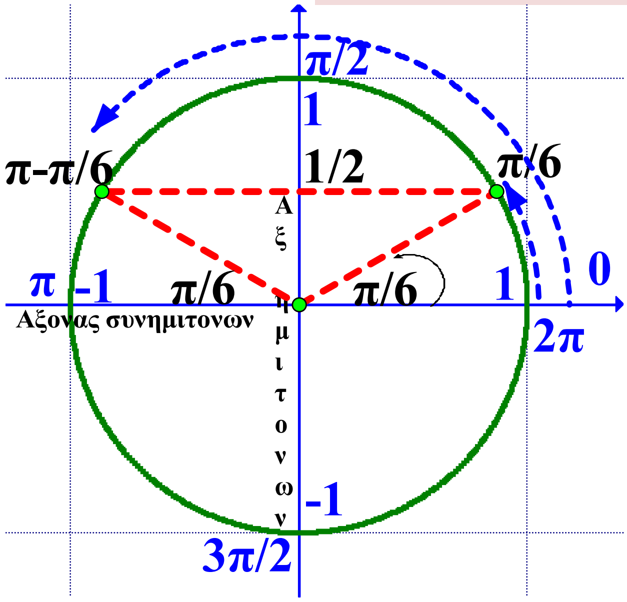
1. Παράδειγμα

Να λυθεί η $\boldsymbol{\eta\mu x = \frac{1}{2}}$.

Λύση

$\boldsymbol{\eta\mu x = \frac{1}{2}}$

Από τον πίνακα προκύπτει ότι $\frac{1}{2} = \boldsymbol{\eta\mu\frac{\pi}{6}}$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \\ \quad \eta' \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \quad \text{προσθέσουμε το } \mathbf{2\kappa\pi} \ (\,\kappa \text{ περιόδους}\,) \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ \quad \eta' \\ x = 2\kappa\pi + \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Με την γραφική παράσταση:

Οι λύσεις της εξίσωσης **ημχ=α** είναι οι τετμημένες (δηλαδή τα **x**) των σημείων τομής

της καμπύλης **ψ=ημχ** και της ευθείας **ψ=α** .

κάνουμε την γραφική τους παράσταση.

Αν το **α>0** και μικρότερος του 1.

Άρα από το διπλανό σχήμα φαίνεται ότι το **ημχ** παίρνει την τιμή **α** δυο φορές στο **θ** και το **π-θ**
Οπότε στο διάστημα **[0,2π]**(*μιας περιόδου 2π*) η εξίσωση $\boldsymbol{\eta\mu x = \alpha}$ επαληθεύεται από το **x=θ** και το **x=π-θ**
αν λοιπόν προσθέσουμε το
2κπ (*κ περιόδους κύκλους*)
έχουμε

Διάστημα μιας περιόδου

$$\eta\mu x = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \quad \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ομοιοτρόπως αν το **α αρνητικός** και μεγαλύτερος του -1.

2. Παράδειγμα

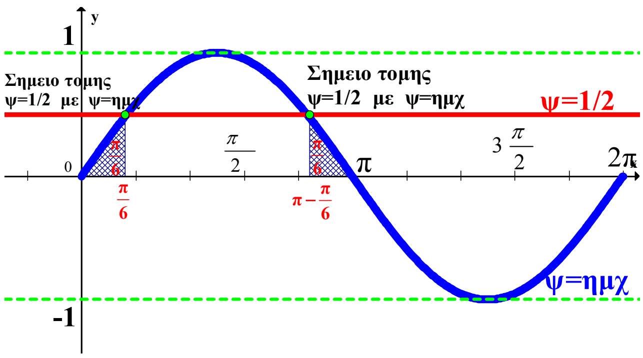
Να λυθεί η $\eta\mu x = \frac{1}{2}$.

Λύση

$$\eta\mu x = \frac{1}{2}$$

Από τον πίνακα προκύπτει ότι $\frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$

Τα σημεία τομής των ψ=1/2 και ψ=ημχ σε διάστημα μιας περιόδου είναι .



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ \quad \acute{\eta} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$ προσθέσουμε το **2κπ (** *κ περιόδους, κύκλους* **)**

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \quad \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

3. Παράδειγμα

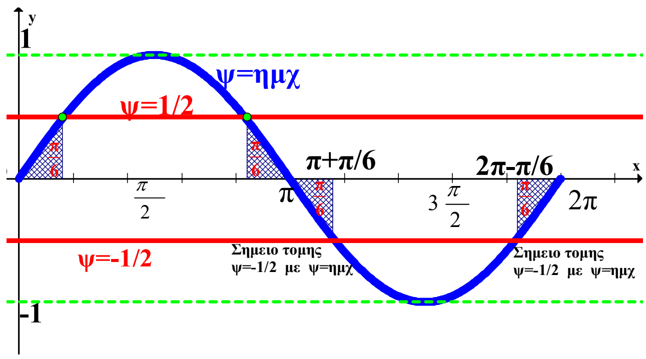
Να λυθεί η $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$.

Λύση

$$\eta\mu x = -\frac{1}{2}$$

Από τον πίνακα προκύπτει ότι $\frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$

Τα σημεία τομής των ψ=-1/2 και ψ=ημχ σε διάστημα μιας περιόδου είναι .



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \end{cases} \text{προσθέσουμε το } \mathbf{2\kappa\pi} \ (\kappa \text{ κύκλους}) \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{11\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Αλγεβρικός τρόπος

Για να λύσουμε μια τριγωνομετρική εξίσωση με ημίτονο θα πρέπει να την φέρουμε στην παρακάτω μορφή:

Μορφή Εξίσωσης	Τύποι Λύσεων
$\eta\mu x = \eta\mu\alpha$	$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \alpha \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \alpha \end{cases}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$

4. Παράδειγμα

Να λυθεί η $\mathbf{2\eta\mu x - 1 = 0}$

Λύση

$$2\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\eta\mu x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

χωρίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς από αριθμούς.
Διαιρούμε με τον συντελεστή του ημx , δηλαδή το 2.
Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κανέναν από τους τύπους λύσεων , γιατί δεν υπάρχουν 2 ημίτονα .
Μετατρέπουμε το $\frac{1}{2}$ σε ημίτονο τόξου.
Από τον πίνακα προκύπτει ότι $\frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

5. Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\frac{5\pi}{6}$

Λύση

$$\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$$

Εφαρμόζουμε τους τύπους έχοντας σαν άγνωστο τον x–π/3.

$$\begin{cases} x-\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x-\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\pi-\frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

Λύνουμε τις εξισώσεις ως προς x.

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{1}-\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

(Κάνουμε τις πράξεις στο 2^{o} μέλος)

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z}$$

2. Η εξίσωση συνx = α

- Αν το **α>1 ή α<-1** **<u>δεν έχει λύσεις</u>** αφού $-1\leq \sigma\upsilon\nu x\leq 1$.
- Αν $-1\leq \alpha\leq 1$ τότε έχει λύσεις.

Με τον τριγωνομετρικό κύκλο :

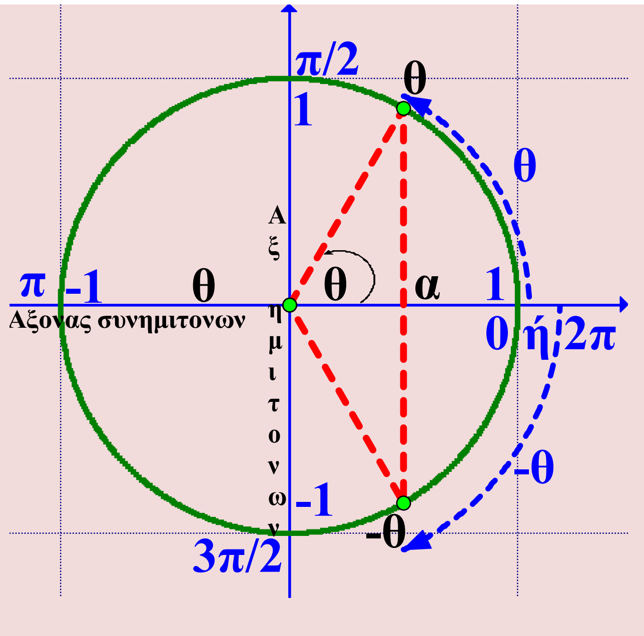
- Αν το **α** θετικός και μικρότερος του 1.

Βάζουμε στο άξονα των συνημίτονων (χ΄χ) τη θετική τιμή **α** και φέρουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα των ημίτονων (ψ΄ψ) η οποία τέμνει τον κύκλο στο **θ** και το **-θ** .

Άρα από το διπλανό σχήμα φαίνεται ότι το **συνx** παίρνει την τιμή **α** δυο φορές στο **θ** και το **-θ**

Οπότε στον τριγωνομετρικό κύκλο στο διάστημα **[0,2π]**(*μιας περιόδου 2π*) η εξίσωση **συνx = α** επαληθεύεται από το **θ** και το **-θ**

αν λοιπόν προσθέσουμε το



2κπ (*κ περιόδους*)

έχουμε

$$\text{συν}x=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\theta \\ \quad\text{ή} \\ x=2\kappa\pi-\theta \end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

- Ομοιοτρόπως αν το **α αρνητικός** και μεγαλύτερος του -1.

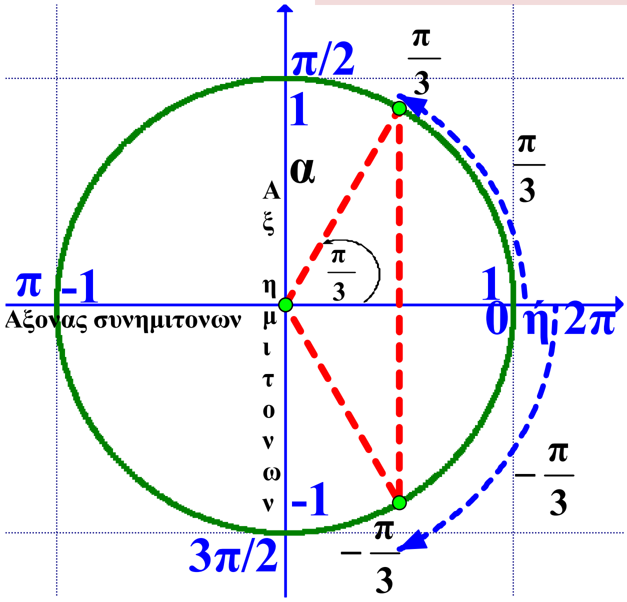
6. Παράδειγμα

Να λυθεί η $\text{συν}x=\dfrac{1}{2}$.

Λύση

$$\text{συν}x=\frac{1}{2}$$

Από τον πίνακα προκύπτει ότι $\dfrac{1}{2}=\text{συν}\dfrac{\pi}{3}$



$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3} \\ \quad\text{ή} \\ x=-\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \quad \text{προσθέσουμε το } \mathbf{2\kappa\pi} \text{ (κ περιόδους κύκλους)} \begin{cases} x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{3} \\ \quad\text{ή} \\ x=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{3} \end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Με την γραφική παράσταση

Οι λύσεις της εξίσωσης **συνx = α** είναι οι τετμημένες (δηλαδή τα **χ**) των σημείων τομής

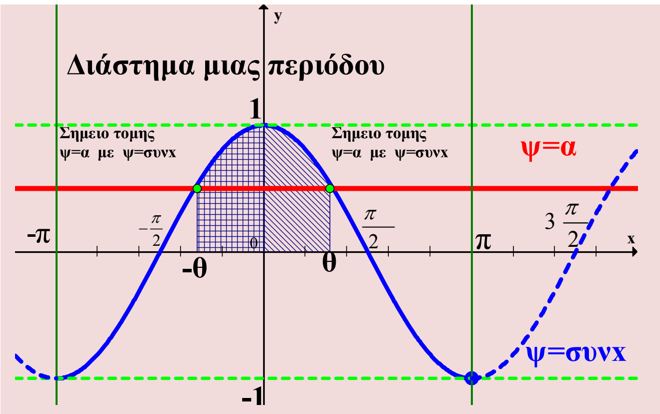
της καμπύλης $\psi=\text{συν}x$ και της ευθείας $\psi=\alpha$.

κάνουμε την γραφική τους παράσταση .

Αν το **α>0** και μικρότερος του 1.

Άρα από το διπλανό σχήμα φαίνεται ότι το **συνx** παίρνει την τιμή **α** δυο φορές στο **θ** και το **-θ**
Οπότε στο διάστημα **[-π, π]**(*μιας περιόδου 2π*) η εξίσωση $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x = \alpha}$ επαληθεύεται από το **θ** και το **-θ**
αν λοιπόν προσθέσουμε το **2κπ** (*κ περιόδους*)
έχουμε

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}}$$



Ομοιοτρόπως αν το **α αρνητικός** και μεγαλύτερος του -1.

7. Παράδειγμα

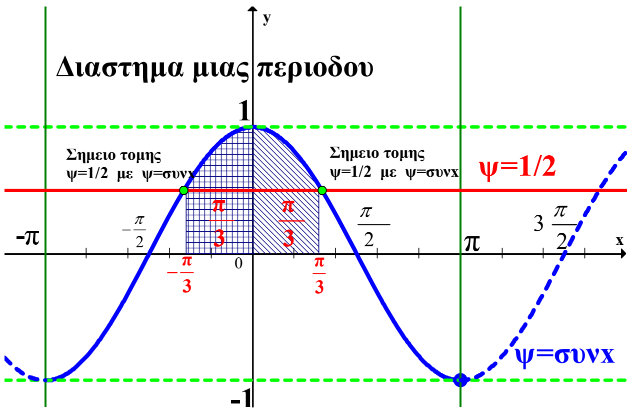
Να λυθεί η $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}}$.

Λύση

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}}$$

Από τον πίνακα προκύπτει ότι $\boldsymbol{\frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}$

Τα σημεία τομής των ψ=1/2 και ψ=συνx σε διάστημα μιας περιόδου είναι .



$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases}} \text{ προσθέσουμε το } \boldsymbol{2\kappa\pi} \text{ (κ περιόδους κύκλους)} \boldsymbol{\begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

8. Παράδειγμα

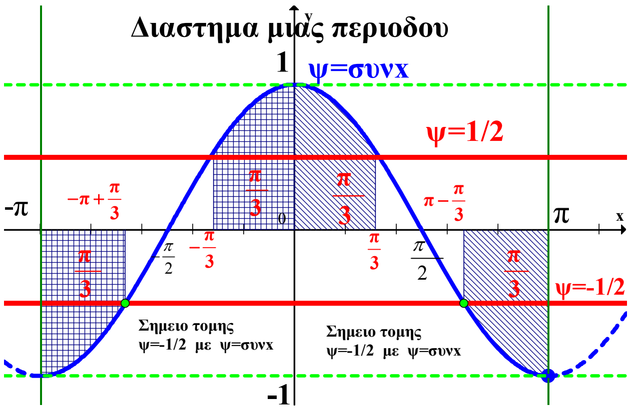
Να λυθεί η $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}}$.

Λύση

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}}$$

Από τον πίνακα προκύπτει ότι $\boldsymbol{\frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}$

Τα σημεία τομής των ψ=-1/2 και ψ=συνx σε διάστημα μιας περιόδου είναι .



$$\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}\\ \eta'\\ x=\pi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}\end{cases}$$ προσθέσουμε το **2κπ** (*κ περιόδους*)

$$\begin{cases}x=2\kappa\pi+\dfrac{2\pi}{3}\\ \eta'\\ x=2\kappa\pi+\dfrac{4\pi}{3}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Αλγεβρικός τρόπος:

Για να λύσουμε μια τριγωνομετρική εξίσωση με συνημίτονο θα πρέπει να την φέρουμε στην παρακάτω μορφή:

Μορφή Εξίσωσης	Τύποι Λύσεων
$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\begin{cases}x=2\kappa\pi+\alpha\\ \eta'\\ x=2\kappa\pi-\alpha\end{cases}$ $\mu\varepsilon\ \kappa\in\mathbb{Z}$

9. Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{5}$

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{5}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\dfrac{3\pi}{5}\\ \eta'\\ x=2\kappa\pi-\dfrac{3\pi}{5}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

10. Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{2}=0$

Λύση

$$2\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$$

Χωρίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς από αριθμούς.

$$\frac{2\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

Διαιρούμε με τον συντελεστή αγνώστου (τον 2) για να απομονώσουμε το $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

$$\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow$$

Από τον πίνακα προκύπτει ότι $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{cases} x-\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \\ \quad\quad\acute{\eta} \\ x-\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Λύνουμε ως προς x τις εξισώσεις.

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} \\ \quad\quad\acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{12} \\ \quad\quad\acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{12} \end{cases}\kappa\in\mathbb{Z}$$