Στις παρακάτω ασκήσεις, υπάρχει από ένα λάθος στο μέρος της λύσης που εντοπίζει, υποτίθεται, την ακρότατη τιμή του μέτρου. Βρείτε το λάθος και την σωστή τιμή του ακροτάτου.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u>

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με w=z+3+4i και $\left|z+\frac{17}{2}\right| = \left|z-\frac{1}{2}-12i\right|$.

Α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας Κ(z).

Β. Να βρείτε το ελάχιστο δυνατό μέτρο του w.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Α. Το Κ(z) βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΑΒ όπου Α(-17/2,0) και Β(1/2,12), η οποία είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Αν θέσουμε $z = x + yi$, βρίσκουμε την εξίσωση 3x+4y=12, η οποία είναι της μεσοκαθέτου (ε) του ΑΒ.

Β. Με $z = x + yi$, είναι $w = (x+3)+(y+4)i$. Έτσι :

$|w| = \sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2} = \sqrt{x^2+y^2+6x+8y+25}$ και αφού

$6x+8y = 2(3x+4y) = 24$: $|w| = \sqrt{x^2+y^2+49} \geq \sqrt{49} = 7$ δηλαδή $|w| \geq 7$.

Έτσι $|w|_{\min} = 7$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u>

Α. Να λύσετε την εξίσωση: $z^2 - 6\sigma\upsilon\nu\theta \cdot z + 5\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4 = 0$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$.

Β. Να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης, για τις διάφορες τιμές του θ.

Γ. Να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου $|z_1 - z_2|$ για τις ρίζες αυτές.

ΛΥΣΗ

Α. Είναι $\Delta=(-6\sigma\upsilon\nu\theta)^2-4(5\sigma\upsilon\nu^2\theta+4)=16\sigma\upsilon\nu^2\theta-16=-(4\eta\mu\theta)^2$ άρα $z_{1,2}=3\sigma\upsilon\nu\theta\pm2\eta\mu\theta\cdot i$.

Β. Αν $M_{1,2}$ οι εικόνες των $z_{1,2}$ τότε $x_{1,2}=3\sigma\upsilon\nu\theta$ ενώ $y_{1,2}=\pm2\eta\mu\theta$. Έτσι: $\frac{x_{1,2}}{3}=\sigma\upsilon\nu\theta, \frac{y_{1,2}}{2}=\pm\eta\mu\theta$ οπότε τα σημεία $M_{1,2}$ βρίσκονται στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Γ. Είναι $|z_1-z_2|=(M_1M_2)$ και η μέγιστη τιμή προκύπτει όταν το τμήμα M_1M_2 γίνει ο μεγάλος άξονας της έλλειψης. Είναι $\alpha^2=9$ άρα $\alpha=3$ και $2\alpha=6$. Έτσι: $|z_1-z_2|_{\max}=6$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται η εξίσωση $z^2-2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot z+(5-4\eta\mu\theta)=0$, όπου $\theta\in[0,\pi]$.

Α. Να βρείτε τις ρίζες της $z_{1,2}$ και τη γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες τους.

Β. Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου $|z_1-z_2|$.

ΛΥΣΗ

Α. Είναι $\Delta=4\sigma\upsilon\nu^2\theta-20+16\eta\mu\theta=4(1-\eta\mu^2\theta)-20+16\eta\mu\theta=-4(\eta\mu^2\theta-4\eta\mu\theta+4)=$
$=-[2(\eta\mu\theta-2)]^2$ άρα $z_{1,2}=\sigma\upsilon\nu\theta\pm(\eta\mu\theta-2)\cdot i$. Αν $M_1(\sigma\upsilon\nu\theta,\eta\mu\theta-2)$ η εικόνα του $z_1=\sigma\upsilon\nu\theta+(\eta\mu\theta-2)\iota$, τότε ισχύει $x_M^2+(y_M+2)^2=1$, οπότε το M_1 κινείται στον κύκλο με κέντρο το $K(0,-2)$ και ακτίνα 1. Όμοια, η εικόνα $M_2(\sigma\upsilon\nu\theta,2-\eta\mu\theta)$ βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο $\Lambda(0,2)$ και ακτίνα 1.

Β. Είναι $|z_1 - z_2| = (M_1M_2)$. Με ένα πρόχειρο σχήμα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το μέγιστου μήκους τμήμα M_1M_2 προκύπτει όταν το M_1 βρεθεί στη θέση (0,-3) ενώ το M_2 στη θέση (0,3). Έτσι: $|z_1 - z_2|_{\max} = 6$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω z=x+yi με x, y πραγματικούς και $x^2 + \dfrac{y^2}{\eta\mu^2\theta} = 1$, όπου $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Α. Αποδείξτε ότι: $|z|^2 + |z^2 - \sigma\upsilon\nu^2\theta| = 1 + \eta\mu^2\theta$.

Β. Αν η εικόνα του z^2 βρίσκεται σε έλλειψη με εστίες την αρχή των αξόνων και το σημείο Α(1/2,0) :

1. Να βρείτε την τιμή του $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.
2. Υπολογίστε το μιγαδικό z με $|z| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου του z;

ΛΥΣΗ

Α. Η εικόνα Μ(z) βρίσκεται στην έλλειψη με $\alpha^2=1$, $\beta^2=\eta\mu^2\theta$ άρα

$\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=\sigma\upsilon\nu^2\theta$. Έτσι $\gamma=\sigma\upsilon\nu\theta>0$ αφού $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ και οι εστίες είναι

$E'(-\sigma\upsilon\nu\theta,0)$, $E(\sigma\upsilon\nu\theta,0)$. Θα ισχύει, λοιπόν:

$(ME') + (ME) = 2\alpha \Leftrightarrow |z + \sigma\upsilon\nu\theta| + |z - \sigma\upsilon\nu\theta| = 2$, οπότε

$$(|z + \sigma\upsilon\nu\theta| + |z - \sigma\upsilon\nu\theta|)^2 = 4 \Leftrightarrow |z + \sigma\upsilon\nu\theta|^2 + 2|z + \sigma\upsilon\nu\theta||z - \sigma\upsilon\nu\theta| + |z - \sigma\upsilon\nu\theta|^2 = 4$$

και μετά τις πράξεις: $2|z|^2 + 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + 2|z^2 - \sigma\upsilon\nu^2\theta| = 4$ από όπου τελικά έχουμε το ζητούμενο.

Β. 1. Αφού $\left|z^2-0\right|+\left|z^2-\sigma\upsilon\nu^2\theta\right|=1+\eta\mu^2\theta$, η εικόνα του z^2 κινείται, για κάθε τιμή του θ, σε έλλειψη με εστίες Ο(0,0) και ($\sigma\upsilon\nu^2\theta$,0). Συμπεραίνουμε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\theta=1/2$ άρα $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και τελικά θ=π/4.

2. Αφού $\eta\mu^2\theta=1/2$, θα είναι: $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1\Leftrightarrow x^2+2y^2=1$. Ακόμη:

$|z|^2=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{3}{4}$. Από το σύστημα, βρίσκουμε: $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, y\pm\frac{1}{2}$

οπότε $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{1}{2}i$.

3. Αντικαθιστώντας στη σχέση του (Α): $|z|^2+\left|z^2-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$ άρα :

$|z|^2=\frac{3}{2}-\left|z^2-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{3}{2}$. Έτσι: $|z|^2_{\max}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow|z|_{\max}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w=\frac{3z+2i}{i\bar{z}+6}$. Η εικόνα του z βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

Α. Αποδείξτε ότι: η εικόνα του w βρίσκεται σε ομόκεντρο κύκλο ακτίνας 1.

Β. Υπολογίστε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$.

ΛΥΣΗ

Δόθηκε ότι $|z|=2$ άρα $z\bar{z}=|z|^2=2^2=4$ οπότε $\bar{z}=\frac{4}{z}$.

Α. Είναι: $|w|=\frac{|3z+2i|}{\left|\frac{4i}{z}+6\right|}=\frac{|3z+2i|}{\left|\frac{6z+4i}{z}\right|}=\frac{|3z+2i|}{\frac{2|3z+2i|}{|z|}}=\frac{|z|}{2}=\frac{2}{2}=1$.

Β. Είναι $|z-w|=(MK)$, όπου Μ(z), Κ(w). Με ένα πρόχειρο σχήμα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: $|z-w|_{\min}=1$ ενώ $|z-w|_{\max}=3$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w = \frac{2z - i}{iz + 2}$.

Α. Αποδείξτε ότι: αν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ=1, τότε το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού w.

Β. Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου $|z - w|$.

Γ. Για ποια τιμή του z προκύπτει η παραπάνω μέγιστη τιμή;

ΛΥΣΗ

Α. Θα δείξουμε ότι: αν $|z| = 1$ τότε $|w| = 1$. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι, για παράδειγμα:

$$|w| = \frac{|2z - i|}{|iz + 2|} = \frac{|2z - i|}{|\overline{iz + 2}|} = \frac{|2z - i|}{\left|-\frac{i}{z} + 2\right|} = \frac{|2z - i|}{\left|\frac{-i + 2z}{z}\right|} = \frac{|2z - i|}{\frac{|2z - i|}{1}} = 1, \text{ αφού } \bar{z} = \frac{1}{z}.$$

Β. Αν Μ(z), Κ(w) οι εικόνες των z, w τότε $|z - w| = (MK)$. Τα Μ, Κ βρίσκονται σε κύκλο ακτίνας ρ=1 οπότε η μέγιστη τιμή του (ΜΚ) προκύπτει όταν η χορδή ΜΚ γίνει διάμετρος. Συμπεραίνουμε ότι: $|z - w|_{\max} = 2$.

Γ. Τα σημεία Μ, Κ είναι αντιδιαμετρικά όταν είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο Ο του κύκλου. Τούτο συμβαίνει όταν οι z, w είναι αντίθετοι, δηλαδή όταν: $z + w = 0 \Leftrightarrow z + \frac{2z - i}{iz + 2} = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z^2 - 4zi - 1 = 0$. Έχουμε:

$$\Delta = (-4i)^2 - 4(-1) = -12 < 0 \quad \text{άρα} \quad z_{1,2} = \frac{4i \pm \sqrt{12}i}{2} = (2 \pm \sqrt{3})i.$$