ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΕΤΡΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

1. Ε ι σ α γ ω γ ή

- Στο 3^o θέμα των μαθηματικών θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης του 2006, δίνονταν τρεις μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ *και*

  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ *και*, μεταξύ άλλων, ζητούνταν να αποδειχθούν οι ανισότητες :

  $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ *και* $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \geq -1$.

  Ωστόσο, με τα δεδομένα του προβλήματος, μπορούσε να αποδειχθεί ότι

  $|z_1 - z_2|^2 = 3$ ενώ $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = -\frac{1}{2}$. (Δες σχετικά και στο τέλος του άρθρου).

  Αυτό, φυσικά, δεν αναδεικνύει λανθασμένο το θέμα, αλλά εγείρει το ερώτημα κατά πόσο είναι νόμιμο από τη μεριά της «μαθηματικής ηθικής» να ζητούμε από μαθητές να αποδείξουν την **ύπαρξη φράγματος σε μία σταθερή ποσότητα**: τον αριθμό 4 ως **άνω φράγμα** του $|z_1 - z_2|^2$ και τον αριθμό -1 ως **κάτω φράγμα** του $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

- Όταν είδα το θέμα, θυμήθηκα μία άσκηση (από τις «Γενικές» μάλιστα) του χαριτωμένου και αλησμόνητου βιβλίου μαθηματικών τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ Λυκείου (Α' Έκδοση 1999). Στην άσκηση 5 της σελίδας 125 δίνονταν οι μιγαδικοί z_1=3-i και z_2=1+2i και ζητούνταν η **μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης** $|z_1 + z_2|$, δηλαδή η μεγαλύτερη και μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο αριθμός :

  $|(3-i)+(1+2i)| = |4+i| = \sqrt{17}$!!!

  Πόσο μεγάλο μπορεί άραγε να γίνει το $\sqrt{17}$ **;** Ας ευχηθούμε ότι το τετράγωνό του θα περάσει στο πανεπιστήμιο με τέτοιες «Γενικές Ασκήσεις»!

(Παρεπιμπτόντως, στο υπέροχο αυτό βιβλίο, σε μερικές ασκήσεις –σε μερικές άλλες, πάλι, όχι! - όταν λέγαμε «μιγαδικός» εννοούσαμε «μη πραγματικός μιγαδικός». Ωραία έκπληξη!)

2. Φ ρ ά γ μ α – Α κ ρ ό τ α τ ο

- Έστω Α μία παράσταση που περιέχει μεταβλητές (τουλάχιστον μία) και η αριθμητική της τιμή μεταβάλλεται. Ά ν ω   φ ρ ά γ μ α της Α λέγεται κάθε αριθμός α για τον οποίο ισχύει $A \le a$, για οποιαδήποτε τιμή των μεταβλητών της παράστασης Α. Είναι φανερό ότι, τότε, και κάθε αριθμός β με β>α , είναι επίσης ένα άνω φράγμα της Α.
  Για παράδειγμα, αν $A = 3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x$, τότε το 7 είναι ένα άνω φράγμα της Α, αφού: $3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x \le 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7$. Αλλά φυσικά ισχύουν και $A \le 10, A \le 500$ $\kappa\lambda\pi$.

  Ανάλογα: κ ά τ ω   φ ρ ά γ μ α της Α, είναι κάθε αριθμός κ, με $A \ge \kappa$. Αλλά και οποιοσδήποτε αριθμός λ με λ<κ , είναι επίσης κάτω φράγμα της Α.

- Α κ ρ ό τ α τ α της Α είναι το μ έ γ ι σ τ ο και το ε λ ά χ ι σ τ ο της Α:

  Μ έ γ ι σ τ η   Τ ι μ ή της Α είναι ο αριθμός Μ, όταν είναι ο μεγαλύτερος από τις δυνατές τιμές που παίρνει η παράσταση Α.
  Ε λ ά χ ι σ τ η   Τ ι μ ή της Α είναι ο αριθμός m, που είναι η ελάχιστη από τις τιμές που μπορεί να λάβει η παράσταση.

- Έτσι, για την $A = 3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x$, η οποία μετασχηματίζεται (Άλγεβρα Β Λυκείου, σελίδα 46) στη μορφή $A = 5\eta\mu(x+\phi)$, όπου $\eta\mu\phi = \frac{4}{5}, \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{3}{5}$, η μέγιστη τιμή είναι M=5 ενώ η ελάχιστη m=-5. Μπορούμε να δώσουμε και μία διαφορετική απόδειξη, μέσω διανυσμάτων:

Αν θέσουμε $\vec{\alpha}=(3,4)$ και $\vec{\beta}=(\eta\mu x,\sigma\upsilon\nu x)$ τότε είναι $\left|\vec{\alpha}\right|=5,\left|\vec{\beta}\right|=1$ και $\mathrm{A}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. Όμως ισχύει $-\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\leq\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\leq\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|$ δηλαδή $-5\leq\mathrm{A}\leq 5$, με τις ακραίες τιμές να είναι πραγματοποιήσιμες όταν $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$.

- Δεν υποχρεούται κάθε παράσταση να εμφανίζει φράγματα ή ακρότατα. Για παράδειγμα η $A=x+\frac{1}{x},x\neq 0$ δεν έχει ούτε φράγματα ούτε ακρότατα. Η $B=x+\frac{1}{x},x>1$ έχει κάτω φράγμα κάθε αριθμό κ με $\kappa\leq 2$ αλλά δεν έχει ακρότατο. Τέλος, η παράσταση $\Gamma=x+\frac{1}{x},x\geq 1$ έχει κάτω φράγμα κάθε αριθμό κ με $\kappa\leq 2$ και ελάχιστη τιμή το 2. (Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι $x+\frac{1}{x}\geq 2,\forall x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για x=1). Πάντως, <u>όταν μία παράσταση έχει ελάχιστη τιμή, αυτή είναι το μέγιστο κάτω φράγμα της.</u>

- Οι διαφορές μεταξύ άνω φράγματος και μέγιστης τιμής (όταν υπάρχουν) είναι:

1. Η μέγιστη τιμή είναι μοναδική ενώ τα άνω φράγματα άπειρα σε πλήθος. Δεν θα ήταν παράλογο να ζητηθεί στο 3^o θέμα του 2006 ότι π.χ. $\left|z_1-z_2\right|^2\leq 2006$!!

2. Η μέγιστη τιμή είναι αριθμός που <u>λαμβάνει</u> η παράσταση για <u>προσδιορίσιμες</u> τιμές των μεταβλητών που περιέχει.

- Ανάλογης ποιότητας διαφορές μπορούμε να εντοπίσουμε και μεταξύ των ακόλουθων μαθηματικών εννοιών:

1. Μεταξύ <u>συνόλου αφίξεως</u> B συνάρτησης $f: A \to B$ και <u>συνόλου τιμών</u> f(A): Το B είναι υπερσύνολο του f(A), περιέχει όλες τις τιμές f(x) των στοιχείων x του A, αλλά ενδεχομένως και αριθμούς που δεν είναι τιμές της συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν $f: \mathbb{R} \to [-1,10]$ με $f(x) = \eta\mu x$ τότε B=[-1,10] ενώ προφανώς f(A)=[-1,1].

2. Μεταξύ της <u>περιβάλλουσας γραμμής</u> και του <u>γεωμετρικού τόπου</u> μεταβλητού σημείου Μ. Η περιβάλλουσα είναι «η γραμμή στην οποία κινείται το Μ», άσχετα με το αν τελικά το Μ δεν μπορεί να βρεθεί σε όλες τις θέσεις της. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε μεταβλητό σημείο Μ(ημθ, συνθ) με $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ τότε $x_M{}^2 + y_M{}^2 = 1$, άρα το Μ <u>κινείται</u> στο μοναδιαίο κύκλο (Ο,1). Αφού όμως $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, συμπεραίνουμε ότι $x_M, y_M \geq 0$. Έτσι ο <u>γεωμετρικός τόπος</u> του Μ είναι το τεταρτοκύκλιο του παραπάνω κύκλου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

- Ο προσδιορισμός Ακροτάτων Παράστασης, Συνόλου Τιμών, Γεωμετρικού Τόπου είναι σαφώς δυσχερέστερος από τον υπολογισμό φραγμάτων ή περιβάλλουσας, εφόσον απαιτεί έλεγχο των αποτελεσμάτων ως προς τη δυνατότητα πραγματοποίησής τους.

3. Ασκήσεις με Ακρότατα Μέτρου Μιγαδικών

Στη συνέχεια θα δούμε μερικές ασκήσεις, στις οποίες ο βιαστικός εντοπισμός «ακροτάτων» αποδεικνύεται παραπλανητικός. Σε κάθε περίπτωση ακολουθεί η αποκατάσταση της αλήθειας.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με w=z+3+4i και $\left|z+\frac{17}{2}\right|=\left|z-\frac{1}{2}-12i\right|$.

Α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας Κ(z).

Β. Να βρείτε το ελάχιστο δυνατό μέτρο του w.

ΛΥΣΗ

Α. Το Κ(z) βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΑΒ όπου Α(-17/2,0) και Β(1/2,12), η οποία είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Αν θέσουμε $z=x+yi$, βρίσκουμε την εξίσωση 3x+4y=12, η οποία είναι της μεσοκαθέτου (ε) του ΑΒ.

Β. Με $z=x+yi$, είναι $w=(x+3)+(y+4)i$. Έτσι :

$|w|=\sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2}=\sqrt{x^2+y^2+6x+8y+25}$ και αφού $6x+8y=2(3x+4y)=24$:

$|w|=\sqrt{x^2+y^2+49}\geq\sqrt{49}=7$ δηλαδή $|w|\geq 7$. Έτσι $|w|_{\min}=7$.

ΣΧΟΛΙΟ : Σύμφωνα με τον τρόπο λύσης στο (Β), το ελάχιστο μέτρο του w επιτυγχάνεται όταν $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$. Όμως η εικόνα του αριθμού 0 δεν βρίσκεται στην 3x+4y=12!! Διαφορετικά: Ο μιγαδικός z=0+0i δεν έχει την ιδιότητα $\left|z+\frac{17}{2}\right|=\left|z-\frac{1}{2}-12i\right|$. Κατά συνέπεια, το 7 δεν είναι η ελάχιστη τιμή του μέτρου του w, αλλά ένα κάτω φράγμα. Το λάθος διορθώνεται ως εξής: Είναι $|w|=(KA)$, όπου K(z) , A(-3,-4). Έτσι,

έχουμε: $|w|_{\min}=d(A,\varepsilon)=\frac{|3(-3)+4(-4)-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{37}{5}>7$. Με τον γεωμετρικό αυτόν τρόπο, είναι δυνατό να προσδιορισθεί και ο μιγαδικός w με το ελάχιστο δυνατό μέτρο.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Α. Να λύσετε την εξίσωση: $z^2-6\sigma\upsilon\nu\theta\cdot z+5\sigma\upsilon\nu^2\theta+4=0$, όπου $\theta\in\mathbb{R}$.

Β. Να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης, για τις διάφορες τιμές του θ.

Γ. Να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου $|z_1-z_2|$ για τις ρίζες αυτές.

ΛΥΣΗ

Α. Είναι $\Delta=(-6\sigma\upsilon\nu\theta)^2-4(5\sigma\upsilon\nu^2\theta+4)=16\sigma\upsilon\nu^2\theta-16=-(4\eta\mu\theta)^2$ άρα

$z_{1,2}=3\sigma\upsilon\nu\theta\pm2\eta\mu\theta\cdot i$.

Β. Αν $M_{1,2}$ οι εικόνες των $z_{1,2}$ τότε $x_{1,2}=3\sigma\upsilon\nu\theta$ ενώ $y_{1,2}=\pm2\eta\mu\theta$. Έτσι:

$\frac{x_{1,2}}{3}=\sigma\upsilon\nu\theta, \frac{y_{1,2}}{2}=\pm\eta\mu\theta$ οπότε τα σημεία $M_{1,2}$ βρίσκονται στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Γ. Είναι $|z_1 - z_2| = (M_1M_2)$ και η μέγιστη τιμή προκύπτει όταν το τμήμα M_1M_2 γίνει ο μεγάλος άξονας της έλλειψης. Είναι $\alpha^2=9$ άρα $\alpha=3$ και $2\alpha=6$. Έτσι:
$|z_1 - z_2|_{\max} = 6$.

ΣΧΟΛΙΑ:

- Οι μιγαδικοί z_1, z_2 είναι συζυγείς επομένως οι εικόνες τους είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x. Έτσι, η χορδή M_1M_2 της έλλειψης είναι κάθετη στον x΄x άρα η μέγιστη τιμή της είναι ο μικρός άξονάς της , δηλαδή: $|z_1 - z_2|_{\max} = 2\beta = 2 \cdot 2 = 4$.

- Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε και ως εξής: Είναι $|z_1 - z_2| = |z_1 - \overline{z_1}| = |2\operatorname{Im}(z_1) \cdot i| = 2 \cdot 2 \cdot |\eta\mu\theta| = 4 \cdot |\eta\mu\theta|$ άρα $|z_1 - z_2|_{\max} = 4$, όταν $|\eta\mu\theta| = 1$ κλπ.

- Με το δεύτερο αυτόν τρόπο, μπορεί να απαντηθεί και η επόμενη παραλλαγή της άσκησης: Να δοθεί ότι $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ αντί για $\theta \in \mathbb{R}$. Σ' αυτή την περίπτωση η μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$ αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή του $|\eta\mu\theta|$ με $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, δηλαδή στο $\left|\eta\mu\frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Θα βρίσκαμε $|z_1 - z_2|_{\max} = 2\sqrt{2}$.

- Αν θέλει κανείς να περιπλέξει ακόμη περισσότερο την κατάσταση, μπορεί να δώσει διαφορετικό διάστημα για το θ, π.χ. το $[7\pi/6, 4\pi/3]$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot z + (5 - 4\eta\mu\theta) = 0$, όπου $\theta \in [0, \pi]$.

Α. Να βρείτε τις ρίζες της $z_{1,2}$ και τη γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες τους.

Β. Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου $|z_1 - z_2|$.

ΛΥΣΗ

Α. Είναι $\Delta = 4\sigma\upsilon\nu^2\theta - 20 + 16\eta\mu\theta = 4(1 - \eta\mu^2\theta) - 20 + 16\eta\mu\theta = -4(\eta\mu^2\theta - 4\eta\mu\theta + 4) = -[2(\eta\mu\theta - 2)]^2$ άρα $z_{1,2} = \sigma\upsilon\nu\theta \pm (\eta\mu\theta - 2) \cdot i$. Αν $M_1(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta - 2)$ η εικόνα του $z_1 = \sigma\upsilon\nu\theta + (\eta\mu\theta - 2)\iota$, τότε ισχύει $x_M^2 + (y_M + 2)^2 = 1$, οπότε το M_1 κινείται στον κύκλο με κέντρο το $K(0,-2)$ και ακτίνα 1. Όμοια, η εικόνα $M_2(\sigma\upsilon\nu\theta, 2 - \eta\mu\theta)$ βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο $\Lambda(0,2)$ και ακτίνα 1.

Β. Είναι $|z_1 - z_2| = (M_1M_2)$. Με ένα πρόχειρο σχήμα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το μέγιστου μήκους τμήμα M_1M_2 προκύπτει όταν το M_1 βρεθεί στη θέση (0,-3) ενώ το M_2 στη θέση (0,3). Έτσι: $|z_1 - z_2|_{\max} = 6$.

ΣΧΟΛΙΑ

- Είναι $|z_1 - z_2| = |z_1 - \overline{z_1}| = 2|\mathrm{Im}(z_1)| = 2 \cdot |\eta\mu\theta - 2| = 4 - 2\eta\mu\theta$. Στο $[0,\pi]$, η ελάχιστη τιμή του ημθ είναι ημ0=ημπ=0 άρα $|z_1 - z_2|_{\max} = 4$. Προκύπτει όταν $M_1(1,-2)$, $M_2(1,2)$.

- Αν στο ερώτημα (Α) είχε ζητηθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων, τότε τα πράγματα θα ήταν ευκολότερα στο (Β)- αλλά δυσκολότερα στο (Α): ουδέν καλόν αμιγές κακού! Αφού $\theta \in [0, \pi]$, θα έχουμε $\sigma\upsilon\nu\theta \in [-1, 1]$ ενώ

$\eta\mu\theta \in [0,1]$ άρα $(\eta\mu\theta - 2) \in [-2,-1]$ δηλαδή $-2 \le \eta\mu\theta - 2 \le -1$ και $1 \le 2 - \eta\mu\theta \le 2$. Έτσι , για το M_1(x,y) ισχύουν $-1 \le x \le 1, -2 \le y \le -1$ και για το M_2: $-1 \le x \le 1, 1 \le y \le 2$. Τελικά, ο γεωμετρικός τόπος του M_1 είναι το πάνω ημικύκλιο του πρώτου κύκλου ενώ του M_2 το κάτω ημικύκλιο του δεύτερου κύκλου.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω z=x+yi με x, y πραγματικούς και $x^2 + \dfrac{y^2}{\eta\mu^2\theta} = 1$, όπου $\theta \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.

Α. Αποδείξτε ότι: $|z|^2 + |z^2 - \sigma\upsilon\nu^2\theta| = 1 + \eta\mu^2\theta$.

Β. Αν η εικόνα του z^2 βρίσκεται σε έλλειψη με εστίες την αρχή των αξόνων και το σημείο Α(1/2,0) :

1. Να βρείτε την τιμή του $\theta \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.
2. Υπολογίστε το μιγαδικό z με $|z| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου του z;

ΛΥΣΗ

Α. Η εικόνα M(z) βρίσκεται στην έλλειψη με $\alpha^2=1$, $\beta^2=\eta\mu^2\theta$ άρα $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=\sigma\upsilon\nu^2\theta$.

Έτσι γ=συνθ>0 αφού $\theta \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ και οι εστίες είναι Ε'(-συνθ,0) ,Ε(συνθ,0).

Θα ισχύει, λοιπόν: $(ME') + (ME) = 2\alpha \Leftrightarrow |z + \sigma\upsilon\nu\theta| + |z - \sigma\upsilon\nu\theta| = 2$, οπότε

$(|z + \sigma\upsilon\nu\theta| + |z - \sigma\upsilon\nu\theta|)^2 = 4 \Leftrightarrow |z + \sigma\upsilon\nu\theta|^2 + 2|z + \sigma\upsilon\nu\theta||z - \sigma\upsilon\nu\theta| + |z - \sigma\upsilon\nu\theta|^2 = 4$

και μετά τις πράξεις: $2|z|^2 + 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + 2|z^2 - \sigma\upsilon\nu^2\theta| = 4$ από όπου τελικά έχουμε το ζητούμενο.

Β. 1. Αφού $\left|z^2-0\right|+\left|z^2-\sigma\upsilon\nu^2\theta\right|=1+\eta\mu^2\theta$, η εικόνα του z^2 κινείται, για κάθε τιμή του θ, σε έλλειψη με εστίες Ο(0,0) και ($\sigma\upsilon\nu^2\theta$,0). Συμπεραίνουμε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\theta=1/2$ άρα $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και τελικά θ=π/4.

2. Αφού $\eta\mu^2\theta=1/2$, θα είναι: $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1 \Leftrightarrow x^2+2y^2=1$. Ακόμη:

$|z|^2=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{3}{4}$. Από το σύστημα, βρίσκουμε: $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, y\pm\frac{1}{2}$

οπότε $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{1}{2}i$.

3. Αντικαθιστώντας στη σχέση του (Α): $|z|^2+\left|z^2-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$ άρα :

$|z|^2=\frac{3}{2}-\left|z^2-\frac{1}{2}\right|\le\frac{3}{2}$. Έτσι: $|z|^2_{\max}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow |z|_{\max}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

<u>ΣΧΟΛΙΑ</u>

- Είναι $x^2+2y^2=1$ και $|z|^2=x^2+y^2=x^2+2y^2-y^2=1-y^2\le 1$ άρα $|z|^2_{\max}=1 \Leftrightarrow |z|_{\max}=1$. Αυτό συμβαίνει όταν $y=0$. Τότε $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$, δηλαδή όταν $z=\pm 1+0i \Leftrightarrow z=\pm 1$.
- Η λανθασμένη τιμή $|z|_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{2}$, είναι απλώς ένα άνω φράγμα για το μέτρο του z. Το λάθος στον υπολογισμό ήταν ότι θεωρήθηκε εφικτό να έχουμε $\left|z^2-\frac{1}{2}\right|=0 \Leftrightarrow z^2=\frac{1}{2}$, που φυσικά αντιφάσκει με το $|z|^2=\frac{3}{2}$!

4. Η Αφορμή

- Από τα παραπάνω θα έγινε αντιληπτό ότι, για να βεβαιωθούμε αν ένας αριθμός είναι ακρότατο κι όχι κάποιο φράγμα για την μεταβλητή παράσταση που μας απασχολεί, ο ασφαλής τρόπος είναι να ελέγχουμε για ποιες τιμές των-της μεταβλητής επιτυγχάνεται ο αριθμός αυτός.
- Αφορμή για το άρθρο αυτό, αποτέλεσε μία παραλλαγή άσκησης του σχολικού βιβλίου (που βρήκα σε φροντιστηριακό) όπου, επιπλέον, ζητούνταν η μέγιστη τιμή ενός μέτρου, <u>χωρίς όμως να εξετάζεται αν αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί.</u> Στη συνέχεια, μεταφέρω την αρχική άσκηση (του σχολικού βιβλίου), το ερώτημα για το μέγιστο μέτρο και ένα δικό μου, που αφορά τη δυνατότητα επίτευξής του :

<u>ΑΣΚΗΣΗ 5</u>

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w=\dfrac{2z-i}{iz+2}$.

Α. Αποδείξτε ότι: αν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ=1, τότε το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού w.

Β. Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου $|z-w|$.

Γ. Για ποια τιμή του z προκύπτει η παραπάνω μέγιστη τιμή;

<u>ΛΥΣΗ</u>

Α. Θα δείξουμε ότι: αν $|z|=1$ τότε $|w|=1$. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι, για παράδειγμα:

$$|w|=\frac{|2z-i|}{|iz+2|}=\frac{|2z-i|}{|\overline{iz+2}|}=\frac{|2z-i|}{\left|-\dfrac{i}{z}+2\right|}=\frac{|2z-i|}{\left|\dfrac{-i+2z}{z}\right|}=\frac{|2z-i|}{\dfrac{|2z-i|}{1}}=1,\text{ αφού }\bar{z}=\frac{1}{z}.$$

Β. Αν Μ(z), Κ(w) οι εικόνες των z, w τότε $|z-w|=(MK)$. Τα Μ, Κ βρίσκονται σε κύκλο ακτίνας ρ=1 οπότε η μέγιστη τιμή του (ΜΚ) προκύπτει όταν η χορδή ΜΚ γίνει διάμετρος. Συμπεραίνουμε ότι: $|z-w|_{\max}=2$.

Γ. Τα σημεία Μ, Κ είναι αντιδιαμετρικά όταν είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο Ο του κύκλου. Τούτο συμβαίνει όταν οι z, w είναι αντίθετοι, δηλαδή όταν: $z+w=0 \Leftrightarrow z+\dfrac{2z-i}{iz+2}=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z^2-4zi-1=0$. Έχουμε:

$\Delta=(-4i)^2-4(-1)=-12<0$ άρα $z_{1,2}=\dfrac{4i\pm\sqrt{12}i}{2}=(2\pm\sqrt{3})i$.

<u>ΣΧΟΛΙΑ</u>

- Παρατηρούμε ότι οι ρίζες δεν ικανοποιούν την $|z|=1$, επομένως η μέγιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$ δεν είναι 2. Το ερώτημα, λοιπόν, παραμένει: **υπάρχει μέγιστη τιμή για το μέτρο της διαφοράς z-w;** Και για ποια τιμή του z προκύπτει;
  Η (καταραμένη…) αλγεβρική μορφή θα ξεδιαλύνει τα πράγματα: Θέτοντας z=x+yi, βρίσκουμε ότι $w=\dfrac{3x}{5-4y}+\dfrac{5y-4}{5-4y}i$. Έτσι:
  $|z-w|^2=(\dfrac{3x}{5-4y}-x)^2+(\dfrac{5y-4}{5-4y}-y)^2=\ldots=4\dfrac{y^2-1}{4y-5}$, αφού $x^2=1-y^2$.
  Θεωρώντας τη συνάρτηση $f(y)=\dfrac{y^2-1}{4y-5}$, όπου $y\in[-1,1]$, βρίσκουμε ότι $f'(y)=2\dfrac{2y^2-5y+2}{(4y-5)^2}$, οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο $\mathbf{y_o=1/2}$. Αφού $x^2=1-y^2$, θα είναι $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, επομένως $z_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$. Για $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$, βρίσκουμε $w=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i=\bar{z}$ οπότε $|z-w|_{\max}=\ldots=1$. Τελικά, υπάρχει μέγιστη τιμή για το μέτρο, αλλά δε συμπίπτει με την «προφανή», ούτε προκύπτει για αντίθετους μιγαδικούς.
- Το Β ερώτημα της άσκησης, μπορεί να τροποποιηθεί ως εξής:
  «Αποδείξτε ότι $|z-w|\le 1$». Και το Γ:
  «Αποδείξτε ότι η μέγιστη τιμή του $|z-w|$ είναι το 1». Μία πιθανή αντιμετώπιση:

Β: Είναι $|z-w| = \left|z - \dfrac{2z-i}{iz+2}\right| = ... = \left|\dfrac{z^2+i}{z-2i}\right|$. Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$|z^2+1| \le |z-2i| \Leftrightarrow |z^2+1|^2 \le |z-2i|^2 \Leftrightarrow (z^2+1)(\overline{z}^2+1) \le (z-2i)(\overline{z}+2i)$ ή:

$2\operatorname{Re}(z^2) \le 3 + 2i\operatorname{Im}(z)i \Leftrightarrow 2(x^2-y^2) \le 3-4y \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (2y-1)^2 \ge 0$, που ισχύει.

Γ: Η ισότητα επιτυγχάνεται για **y=1/2,** σύμφωνα με το Β. Η εύρεση των μιγαδικών z και w είναι πια απλή υπόθεση.

- Στο (Γ) ερώτημα χρησιμοποιήσαμε τύπο διακρίνουσας με μη πραγματικό αριθμό. Τα αποτελέσματα είναι φυσικά έγκυρα, ωστόσο αυτή η περίπτωση δεν περιλαμβάνεται στο σχολικό βιβλίο.
- Το πρόβλημα είναι γενικό: όταν δύο μεταβλητοί μιγαδικοί z, w αλληλεξαρτώνται και γνωρίζουμε τις γραμμές κίνησης των εικόνων τους, τότε δεν είναι σίγουρο ότι αυτό που «νομίζουμε» ως ακρότατη τιμή του $|z-w|$ μπορεί να επιτευχθεί. Κι αυτό γιατί, ενδέχεται οι «ιδανικές» θέσεις των εικόνων τους να μην επιτυγχάνονται ταυτόχρονα, εφόσον η οποιαδήποτε θέση της μίας εικόνας καθορίζει αυτόματα και τη θέση της άλλης, μέσω της σταθερής σχέσης που συνδέει τους δύο μιγαδικούς.
- Αν, για παράδειγμα $w = \dfrac{z-i}{zi+1}$ και $|z|=1$, εύκολα βρίσκουμε ότι και $|w|=1$.

  Θα περίμενε κανείς ότι η μέγιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$ είναι 2. Αλλά αυτό συμβαίνει όταν:

  $z+w=0 \Leftrightarrow z + \dfrac{z-i}{iz+1} = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow z^2 - 2zi - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-i)^2 = 0 \Leftrightarrow z = i$, τιμή που όμως απορρίπτεται αφού μηδενίζει τον παρονομαστή του w! Βέβαια, ο παρατηρητικός λύτης ίσως πρόσεχε ότι: $w = \dfrac{i(z-i)}{i(iz+1)} = \dfrac{i(z-i)}{-z+i} = \dfrac{i(z-i)}{-(z-i)}$

  δηλαδή ότι $w=-i$!!! Με άλλα λόγια, <u>ο w είναι σταθερός μιγαδικός</u>. Τώρα είναι: $|z-w| = |z+i| = (MA)$ όπου Α(0,-1) ενώ το Μ(z) βρίσκεται στον κύκλο (Ο,1). Το μήκος (ΜΑ) δε μεγιστοποιείται, αφού το Μ δε μπορεί να βρεθεί στη θέση (1,0), εξαιτίας του ότι $iz+1 \ne 0 \Leftrightarrow z \ne i$.

5. Διερεύνηση

- Θα εξετάσουμε τώρα τις συνθήκες κάτω από τις οποίες δύο συνδεόμενοι μιγαδικοί z, wτου ίδιου μέτρου δε δίνουν μέγιστη τιμή στο μέτρο $|z-w|$.
- Ταυτόχρονα, στην πορεία της διερεύνησης, θα προκύψει κι ένας μηχανισμός παραγωγής «σωστών» εκφωνήσεων, ο οποίος δίνει ανεξάντλητο πλήθος ασκήσεων, παρόμοιας –δυστυχώς- μορφής.
- Έστω, λοιπόν, οι μιγαδικοί z, w με $w=\dfrac{z+\alpha i}{\beta iz+\gamma}$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $|z|=c>0$. Απαιτούμε και $|w|=c$, ώστε οι εικόνες των z, w να βρίσκονται στον ίδιο κύκλο (O,c). Αυτό συμβαίνει όταν:

  $|z+\alpha i|=c|\beta iz+\gamma|\Leftrightarrow(z+\alpha i)(\bar{z}-\alpha i)=c^2(\beta iz+\gamma)(-\beta i\bar{z}+\gamma)$ και, μετά τις πράξεις: $c^2+\alpha^2-\alpha(z-\bar{z})i=c^4\beta^2+c^2\gamma^2+c^2\beta\gamma(z-\bar{z})i$, για κάθε z με $|z|=c$.

  Συμπεραίνουμε ότι: $\boldsymbol{\alpha=-c^2\beta\gamma}$ και $\boldsymbol{c^2+\alpha^2=c^4\beta^2+c^2\gamma^2}$ (1). Λόγω της πρώτης σχέσης: $w=\dfrac{z-c^2\beta\gamma i}{\beta iz+\gamma}$ ενώ $(1)\Leftrightarrow c^2+c^4\beta^2\gamma^2=c^4\beta^2+c^2\gamma^2$, σχέση που οδηγεί στην: $\boldsymbol{(c\beta)^2=1}$ **ή** $\boldsymbol{\gamma^2=1}$.
- Με τις παραπάνω συνθήκες, η μέγιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$ είναι 2c , όσο η διάμετρος του κύκλου στον οποίο βρίσκονται οι δύο εικόνες. Αυτό είναι πραγματοποιήσιμο μόνον όταν : $z+w=0\Leftrightarrow z+\dfrac{z-c^2\beta\gamma i}{\beta iz+\gamma}=0$, που οδηγεί στην εξίσωση: $\beta z^2-(\gamma+1)zi-c^2\beta\gamma=0$ (2).
- Είναι, επομένως, δυνατό να μην προκύψει το αναμενόμενο μέγιστο μέτρο για το $|z-w|$; Ναι! Μόνον όταν η (2) έχει διπλή ρίζα την τιμή του z που απαγορεύει την ύπαρξη του w, δηλαδή την $-\dfrac{\gamma}{\beta i}=\dfrac{\gamma}{\beta}i$. Έστω, λοιπόν, ότι:

  Δ=0 (3) και $\beta\cdot(\dfrac{\gamma i}{\beta})^2-(\gamma+1)\dfrac{\gamma i}{\beta}-c^2\beta\gamma=0$ (4).

Η (3) οδηγεί στην **$(\gamma+1)^2=4\beta^2c^2\gamma$**.

Η (4) στην **$\gamma(c^2\beta^2-1)=0$** από όπου: **$\gamma=0$ ή $(c\beta)^2=1$**.

- Συνοπτικά: Μία άσκηση που ζητά προσδιορισμό μέγιστης τιμής για το $|z-w|$ είναι προβληματική, όταν ικανοποιείται το σύστημα συνθηκών:

  (Σ_1) : **$\gamma^2=1$ ή $(c\beta)^2=1$**

  (Σ_2) : **$(\gamma+1)^2=4\beta^2c^2\gamma$**

  (Σ_3) : **$\gamma=0$ ή $(c\beta)^2=1$**

- Διερευνούμε με βάση τις τελευταίες συνθήκες:

  Αν $\gamma=0$ η (Σ_2) δίνει $1=0$. Έτσι, πρέπει **$(c\beta)^2=1$** οπότε ικανοποιείται η (Σ_1) ενώ η (Σ_2) δίνει $(\gamma+1)^2=4\gamma$, άρα **$\gamma=1$**. Τελικά:

  $\gamma=1$ *και* $(c\beta)^2=1$, οπότε ο w γίνεται:

  $$w=\frac{z-c^2\beta i}{\beta iz+1}=\frac{z-\frac{\beta}{\beta^2}i}{\beta iz+1}=\frac{z-\frac{1}{\beta}i}{\beta iz+1}=\frac{\beta z-i}{\beta(\beta iz+1)}.$$

- Συμπέρασμα: Αν $|z|=c$ και $w=\dfrac{\beta z-i}{\beta(\beta iz+1)}$ όπου $\beta\neq 0$, τότε $|w|=c$ αλλά το μέτρο $|z-w|$ δεν έχει μέγιστη τιμή το 2c. Ωστόσο <u>ο w είναι τότε σταθερός μιγαδικός</u>, αφού: $w=\dfrac{i(\beta z-i)}{i\beta(\beta iz+1)}=\dfrac{\beta iz+1}{i\beta(\beta iz+1)}=\dfrac{1}{\beta i}=-\dfrac{1}{\beta}i$.

- Ποιος είναι ο μηχανισμός παραγωγής «σωστών ασκήσεων», ο οποίος θα αναδεικνυόταν στην πορεία της διερεύνησης; Από τις αρχικές συνθήκες (Σ_1) που εγγυώνται ότι $|w|=c$, αν ισχύει η

$(c\beta)^2=1$, τότε <u>ο w δε μεταβάλλεται</u>. Πράγματι, τότε είναι $c^2\beta=1/\beta$,

άρα: $w=\dfrac{z-\frac{1}{\beta}\gamma i}{\beta iz+\gamma}=\dfrac{\beta z-\gamma i}{\beta(\beta zi+\gamma)}=\dfrac{\beta z-\gamma i}{\beta i(\beta z-\gamma i)}=-\dfrac{1}{\beta}i$.

Η συνθήκη $\gamma^2=1$, δίνει, με $\gamma=1$ είτε $\gamma=-1$, <u>μεταβλητούς w</u>. Αν, π.χ. $\gamma=-1$, $\beta=1$ και $c=3$, τότε παράγεται η παρακάτω <u>ΑΣΚΗΣΗ 6</u> :

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w=\dfrac{z+9i}{iz-1}$ και $|z|=3$.

Α. Αποδείξτε ότι και $|w|=3$.

Β. Βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

Γ. Για ποια τιμή του z το παραπάνω μέτρο γίνεται μέγιστο;

[Απάντηση: $|z-w|_{\max}=6$, όταν $z=\pm 3i$]

6. Εφιαλτικός Επίλογος

Γιατί περιοριστήκαμε σε μιγαδικούς z και w=f(z) με $|z|=|w|$; Ας δούμε και μία περίπτωση στην οποία οι z, w να έχουν διαφορετικά μέτρα:

<u>ΑΣΚΗΣΗ 7</u>

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w=\dfrac{3z+2i}{i\bar{z}+6}$. Η εικόνα του z βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

Α. Αποδείξτε ότι: η εικόνα του w βρίσκεται σε ομόκεντρο κύκλο ακτίνας 1.

Β. Υπολογίστε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$.

ΛΥΣΗ

Δόθηκε ότι $|z|=2$ άρα $z\bar{z}=|z|^2=2^2=4$ οπότε $\bar{z}=\dfrac{4}{z}$.

Α. Είναι: $|w|=\dfrac{|3z+2i|}{\left|\dfrac{4i}{z}+6\right|}=\dfrac{|3z+2i|}{\left|\dfrac{6z+4i}{z}\right|}=\dfrac{|3z+2i|}{\dfrac{2|3z+2i|}{|z|}}=\dfrac{|z|}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

Β. Είναι $|z-w|=(MK)$, όπου Μ(z), Κ(w). Με ένα πρόχειρο σχήμα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: $|z-w|_{\min}=1$ ενώ $|z-w|_{\max}=3$.

ΣΧΟΛΙΑ

Την πάτησες Λευτέρη!

- Είναι $|z-w|=\left|z-\dfrac{3z+2i}{i\bar{z}+6}\right|=\left|\dfrac{i|z|^2+6z-3z-2i}{i\bar{z}+6}\right|=\left|\dfrac{3z+2i}{i\bar{z}+6}\right|=|w|=1$! δηλαδή

  $|z-w|$=σταθερό οπότε $|z-w|_{\min}=|z-w|_{\max}=1$!!

- Διαφορετικά: Θέτοντας z=x+yi έχουμε $x^2+y^2=4$ οπότε :

  $w=\dfrac{3(x+yi)+2i}{i(x-yi)+6}=...=\dfrac{2x(3y+10)}{x^2+(y+6)^2}+\dfrac{3y^2-3x^2+20y+12}{x^2+(y+6)^2}i$. Όμως ισχύει και

  $x^2+(y+6)^2=x^2+y^2+12y+36=40+12y=4(3y+10)$ αφού $x^2+y^2=4$. Ακόμη:

  $3y^2-3x^2+20y+12=3y^2-3(4-y^2)+20y+12=6y^2+20y=2y(3y+10)$.

  Τελικά, η αλγεβρική μορφή του w γίνεται: $w=\dfrac{2x}{4}+\dfrac{2y}{4}i \Leftrightarrow w=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}i$ οπότε

  $|z-w|=\left|\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}i\right|=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{4}}=1=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho o$

- Γεωμετρικά, είναι εντυπωσιακό: Η εικόνα Κ(x/2, y/2) του w είναι το σημείο όπου η ακτίνα ΟΜ [Μ(x, y) είναι η εικόνα του z] τέμνει τον κύκλο (Ο,1).

Φανταστείτε μία περιστρεφόμενη ακτίνα ΟΜ: τα σημεία Ο, Κ, Μ είναι πάντα συνευθειακά!

7. Παράρτημα: Το 3ο Θέμα του 2006

- Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

  α. Να αποδείξετε ότι: i) $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$

  ιι) $|z_1 - z_2|^2 \le 4$ και $\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) \ge -1$

  β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

- 1η Λύση για το (α)

  Είναι $|z_1 + z_2| = |-z_3| = 1$ άρα $|z_1 + z_2|^2 = 1$ από όπου παίρνουμε διαδοχικά:

  $|z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 = 1 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = -1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = -\dfrac{1}{2} \ge -1$. Έτσι:

  $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_1|^2 = 3$ άρα $|z_1 - z_2|^2 = 3 \le 4$.

  Τέλος $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$ και όμοια $|z_3 - z_1| = \sqrt{3} = |z_2 - z_3|$, οπότε αποδείχτηκε και το ερώτημα (i).

- 2η Λύση για το (α) Θέτοντας $z_k = x_k + y_k i$ έχουμε $x_k{}^2 + y_k{}^2 = 1$ με k=1,2,3. Η σχέση $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ δίνει $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ και $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

  Έτσι: $x_1 + x_2 = -x_3$ και $y_1 + y_2 = -y_3$. Θα είναι, λοιπόν, και :

  $(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = (-x_3)^2 + (-y_3)^2$ και μετά τις πράξεις: $x_1x_2 + y_1y_2 = -\dfrac{1}{2}$.

  Τώρα: $|z_1 - z_2|^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}^{\,2} = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 3$, άρα $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$ και $|z_1 - z_2|^2 = 3 \le 4$. Τέλος

$$z_1\overline{z_2} = (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) = (x_1x_2 + y_1y_2) + (y_1x_2 - x_1y_2)i \text{ άρα } \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = -\frac{1}{2} \ge -1.$$

- <u>Και ένα σχόλιο για το (β)</u>

  Αφού $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ είναι προφανές ότι οι εικόνες Α(z_1), Β(z_2) και Γ(z_3) βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο. Αυτό όμως καθόλου δε σημαίνει ότι «ο γεωμετρικός τόπος των Α, Β, Γ είναι ο κύκλος (Ο,1)». Κι αυτό επειδή οι z_1, z_2, z_3 είναι επιφορτισμένοι και με την ιδιότητα $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, η οποία σε συνδυασμό με την $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, συνεπάγεται την $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$, η οποία εγγυάται ότι το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τρίγωνο. Δεδομένης, λοιπόν, της συγκεκριμένης διατύπωσης περί γεωμετρικού τόπου, η σωστή απάντηση είναι: «Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Α, Β, Γ είναι οι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1».