Άρθρο στους Μιγαδικούς Αριθμούς

Η ανισότητα $\|\alpha|-|\beta\|\leq|\alpha\pm\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$ με α , β $\in C$ και η χρήση της στην εύρεση ακροτάτων .

Μπάμπης Στεργίου – Μαθηματικός , Ιούνιος 2008

Α. Εισαγωγή

Το κείμενο αυτό ξεκίνησε να γράφεται με αφορμή το φετινό θέμα(Μάιος 2008) στις πανελλαδικές εξετάσεις , στο οποίο ζητούνταν μεταξύ των άλλων και η **ελάχιστη** τιμή του μέτρου της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών , από τους οποίους ο ένας έγραφε ένα κύκλο και ο άλλος μια ευθεία.

Έχουμε επισημάνει και αλλού και μάλιστα από καιρό ότι η ελάχιστη τιμή Ε και η μέγιστη τιμή Μ μιας παράστασης με μιγαδικούς (αν υπάρχουν), που περιέχει μέτρα , δεν εξασφαλίζεται από τη χρήση και μόνο της βασικής ανισότητας

$$\big||\alpha|-|\beta|\big|\leq|\alpha\pm\beta|\leq|\alpha|+|\beta| \quad (***)$$

αλλά πρέπει να γίνει επαλήθευση αν η παράσταση μπορεί πράγματι να πάρει τις ακραίες αυτές τιμές (εκτός και αν γίνει χρήση βασικών γεωμετρικών προτάσεων και συγκεκριμένα ορισμένων γνωστών γεωμετρικών ανισοτήτων). Φαίνεται όμως ότι η λεπτή αυτή επισήμανση δεν έγινε αρκούντως αντιληπτή από τους μαθητές , με αποτέλεσμα στην διόρθωση των γραπτών να χαθούν μερικές πολύτιμες , έστω και λίγες , μονάδες. Το θέμα βέβαια το είχαμε συζητήσει κατά τη διάρκεια του χειμώνα και στο δικτυακό τόπο **mathematica** με αρκετούς και εκλεκτούς συναδέλφους , όπου μάλιστα παρουσιάσαμε και παραδείγματα για τον τρόπο αντιμετώπισης τέτοιων ασκήσεων .

Β. Γενικές επισημάνσεις.

Γενικά, αν οι εικόνες των μιγαδικών α , β κινούνται πάνω σε καθορισμένες γραμμές ή ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς , τότε μια παράσταση f(α,β) που έχει μιγαδικές μεταβλητές α, β και τιμές πραγματικές ενδέχεται να λαμβάνει δύο ακρότατες τιμές , πιθανόν όμως να λαμβάνει μόνο μέγιστο ή μόνο ελάχιστο ή ακόμα η παράσταση αυτή μπορεί να μην έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο ,αν και μπορεί να είναι φραγμένη . Αυτό που θέλουμε να τονίσουμε με το παρόν άρθρο είναι το γεγονός ότι η χρήση της ανισότητας

$$||\alpha|-|\beta|| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha|+|\beta|$$

ναι μεν μας βοηθάει να βρούμε φράγματα (αν υπάρχουν) για την παράσταση f(α,β), αλλά δεν μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ακροτάτων , δηλαδή ελαχίστου ή μεγίστου , με την προϋπόθεση βέβαια ότι υπάρχουν τέτοιες τιμές.

Έτσι , πιο γενικά , αν καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα της μορφής

$$E \le f(\alpha,\beta,\gamma,\ldots,z) \le M \quad (1),$$

έχοντας χρησιμοποιήσει τη βασική ανισότητα (***) , τότε δεν μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι το μέγιστο της παράστασης αυτής είναι το Μ και το ελάχιστο είναι το Ε. Για να καταλήξουμε με βεβαιότητα σε αυτό το συμπέρασμα πρέπει απαραίτητα να βρούμε τιμές για τις μεταβλητές α , β ,…, z που να ικανοποιούν μεν τους αντίστοιχους περιορισμούς (συνθήκες) , αλλά συγχρόνως η παράσταση f να δίνει στην (1) τη μια φορά την τιμή Μ και την άλλη την τιμή Ε. Πρέπει ωστόσο να επισημάνουμε από την αρχή ότι σε μερικές περιπτώσεις η ανισότητα $||\alpha|-|\beta|| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha|+|\beta|$ μας οδηγεί όντως στις ακρότατες τιμές(ελάχιστο ή μέγιστο) και το μόνο που απομένει είναι η επαλήθευση. Σε πολλές όμως περιπτώσεις που είναι και οι πιο ενδιαφέρουσες, οι τιμές Ε και Μ δεν είναι το ελάχιστο ή το μέγιστο αντίστοιχα , αλλά είναι τελείως παραπλανητικές. Έτσι , η εύρεση του ελαχίστου ή του μεγίστου για το Κ πρέπει να γίνει είτε γεωμετρικά είτε με άλλον αλγεβρικό τρόπο .

Αλλά και η γεωμετρική (εποπτική μεν αλλά θεωρητικά κατοχυρωμένη) προσέγγιση μπορεί καμιά φορά να μας οδηγήσει σε πλάνη, κυρίως όταν οι μεταβλητές της παράστασης βρίσκονται σε αλληλεξάρτηση . Ως εκ τούτου φαίνεται ότι **η επαλήθευση, όπου αυτή δεν είναι ιδιαίτερα δυσχερής , είναι η ασφαλέστερη μέθοδος για τον εντοπισμό των ακρότατων τιμών μιας παράστασης με μιγαδικές μεταβλητές και μέτρα** , πριν καταλήξουμε στην διατύπωση του τελικού συμπεράσματος..

Για να δείξουμε αυτή την αναγκαιότητα , θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω παραδείγματα.

Γ. Εφαρμογές

Άσκηση 1η

Αν ο αριθμός z είναι μιγαδικός και ισχύει $|z-3-4i| = 3$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z|$.

Λύση

Αυτή είναι η πιο απλή περίπτωση που μπορούμε να συναντήσουμε. Σύμφωνα με τη ανισότητα $||\alpha|-|\beta|| \le |\alpha \pm \beta| \le |\alpha|+|\beta|$ έχουμε :

$$|z|-|3+4i| \le |\,|z|-|3+4i|\,| \le |z-3-4i| = 3 \;,$$

οπότε

$$|z|-5 \le 3 \Leftrightarrow |z| \le 3+5 \Leftrightarrow |z| \le 8$$

Φαίνεται λοιπόν ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι το 8 , αλλά πώς μπορούμε να είμαστε σίγουροι για αυτό ; Ένας τρόπος είναι να ψάξουμε να βρούμε έναν αριθμό z_1 που να ικανοποιεί τη σχέση $|z-3-4i| = 3$ και συγχρόνως να είναι $|z_1| = 8$. Ο καλύτερος όμως τρόπος είναι προσφύγουμε στη γεωμετρική μέθοδο και να χαράξουμε το σχήμα , βασιζόμενοι σε γνωστές γεωμετρικές προτάσεις . Η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο το σημείο Κ(3 , 4) και ακτίνα ρ = 3. Εύκολα βλέπουμε ότι το πιο απομακρυσμένο σημείο του κύκλου από την αρχή Ο βρίσκεται στην ευθεία ΟΚ και απέχει από το Ο απόσταση

$$d = OK + \rho = 5 + 3 = 8$$

Επομένως η μέγιστη τιμή για το $|z|$ είναι ίση με 8 .

Επίσης από την ίδια ανισότητα παίρνουμε

$$|3+4i|-|z| \le |\,|z|-|3+4i|\,| \le |z-3-4i| = 3$$

οπότε :

$$|z| \ge |3+4i|-3 \Leftrightarrow |z| \ge 5-3 \Leftrightarrow |z| \ge 2$$

Και εδώ φαίνεται πώς η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι το 2 , αλλά η απόδειξη δεν είναι επαρκής . Ή πρέπει να βρούμε μιγαδικό z_1 που να επαληθεύει τη σχέση $|z-3-4i| = 3$ και συγχρόνως να είναι $|z_1| = 2$ ή να χρησιμοποιήσουμε όπως και πριν το σχήμα και να διαπιστώσουμε ότι πράγματι η ελάχιστη τιμή για το $|z|$ είναι

$$d = OK - \rho = 5 - 3 = 2$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή για το $|z|$ είναι ίση με 2 .

Σχόλιο

Όπως φάνηκε στην άσκηση αυτή , η ανισότητα οδήγησε στην ελάχιστη και μέγιστη τιμή , αλλά χρειάστηκε επαλήθευση είτε αλγεβρική είτε γεωμετρική, κάτι που πάντα είναι απαραίτητο. ***Επισημαίνουμε ότι ακόμα και στη γεωμετρική προσέγγιση πρέπει να βασιστούμε σε γεωμετρικές προτάσεις και όχι απλά μόνο στην εποπτεία.***

Στην επόμενη άσκηση θα δούμε ότι η ανισότητα δεν οδηγεί στην ελάχιστη ή τη μέγιστη τιμή και τα αποτελέσματα είναι τελείως παραπλανητικά.

Άσκηση 2η

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z με $|z - 3 + 4i| \le 2$ και η παράσταση

$$A(z)=|z-3-4i|$$

α) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση .

β) Τι εκφράζει γεωμετρικά η παράσταση A(z) ;

γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης A(z) .

Υπόδειξη

α) Είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο K(3 , - 4) και ακτίνα ρ = 2

β) Την απόσταση της εικόνας του z από το σημείο Λ(3 , 4)

γ) Η βασική ανισότητα

$$\boldsymbol{||z| - |w|| \le |z - w| \le |z| + |w| \quad (1)}$$

δίνει :

$$|z - (3 - 4i)| \le |z| +|(3 - 4i) \le 2 + 5 = 7 \quad (2)$$

Άρα

$$A(z)=|z-3-4i| \le |z| + |3 + 4i| \le 7 + 5 = 12 \quad (3)$$

Ωστόσο η τιμή 12 δεν είναι η μέγιστη , κάτι που δείχνει η γεωμετρική λύση της άσκησης .Η μέγιστη τιμή είναι 10 . Που βρίσκεται άραγε το λάθος το λάθος ; Την απάντηση θα τη δούμε στο γενικό σχόλιο στο τέλος αυτού του άρθρου.

Σχόλιο

Μπορούμε να γράψουμε :

$$A(z)=|z-3-4i|=|(z-3+4i)-8i|\le|z-3+4i|+|8i|\le 2+8=10 \quad (4)$$

Βλέπουμε τώρα ότι η μέγιστη τιμή που δίνει η σχέση (4) είναι η σωστή , αν και χρησιμοποιήσαμε την ίδια ανισότητα (την (1)). Γιατί όμως συμβαίνει αυτό ; Η απάντηση βασίζεται στο γεγονός ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z-3+4i$ και $8i$ μπορούν να βρεθούν στην ίδια ευθεία με την αρχή Ο , για κάποια κατάλληλη θέση της εικόνας του z στον κύκλο με κέντρο Κ(3 , - 4) και ακτίνα ρ = 2.

Απάντηση *: max A(z) = 10 και min A(z) = 6*

Άσκηση 3η

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z , w με $|z - 3 + 4i| \le 2$, $|z - 3 - 4i| \le 3$ καθώς και η παράσταση

$$A=|z-w|$$

α) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z , w που ικανοποιούν τις δοσμένες σχέσεις .

β) Τι εκφράζει γεωμετρικά η παράσταση $A=|z-w|$;

γ) Να αποδείξετε ότι $|z| \le 7$, $|w| \le 8$ και να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A=|z-w|$

Υπόδειξη

α) Είναι οι κυκλικοί δίσκοι (Κ,ρ) και (Λ,R) με

Κ(3 , -4) , Λ(3 , 4) , ρ = 2 και R = 3

β) Την απόσταση των εικόνων των δύο μιγαδικών z m w που βρίσκονται ο ένας στον κύκλο Κ και ο άλλος στον κύκλο Λ.

γ) Η λύση για την εύρεση της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής είναι προτιμότερο να γίνει γεωμετρικά . Χαράζοντας τους κύκλους αυτούς βλέπουμε ότι η μέγιστη τιμή της παράστασης Α είναι

$$A_{max}=K\Lambda+\rho+R=8+2+3=13$$

Ας προσέξουμε ότι η βασική ανισότητα δίνει :

$$|z| - |3 - 4i| \le |z + (3 - 4i| \le 2, \text{ οπότε } |z| \le 5+2 = 7$$

και

$$|w| - |3 + 4i| \le |w + (3 + 4i) | \le 3 , \text{ οπότε } |w| \le 5 + 3 = 8$$

Επομένως

$$A=|z-w|\le|z|+|w|\le 7+8=15$$

Το 15 όμως απέχει σημαντικά από το πραγματικό μέγιστο της παράστασης A που είναι το 13.

Γιατί όμως προκύπτει αυτή η διαφορά ; Η απάντηση είναι παρόμοια με αυτή που δόθηκε στην προηγούμενη άσκηση.

Η ελάχιστη τιμή της παράστασης A είναι

$$A_{max}=K\Lambda-\rho-R=8-2-3=5$$

Στο αποτέλεσμα αυτό καταλήγουμε εποπτικά , χαράσσοντας τους αντίστοιχους κυκλικούς δίσκους.

Άσκηση 4η

Δίνονται οι μιγαδικοί z,w με $\left(i\bar{z}+6\right)w=3z+2i$. Αν η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$ τότε :

α) να αποδείξετε ότι η εικόνα του w ανήκει σε ομόκεντρο κύκλο ακτίνας $r=1$

β) να υπολογίσετε την ελάχιστο και τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$

Λύση:

α) Είναι $|z|=2\Leftrightarrow\bar{z}=\frac{4}{z}$, τότε $|w|=\left|\frac{3z+2i}{i\bar{z}+6}\right|=\frac{|3z+2i|}{\left|i\frac{4}{z}+6\right|}=\frac{|3z+2i|}{\left|\frac{6z+4i}{z}\right|}=\ldots=1$

β) Παρά το ότι με μια πρόχειρη γεωμετρική ερμηνεία φαίνεται; ότι $1\le|z-w|\le 3$, δεν είναι έτσι αφού:

$$|z-w|=\left|z-\frac{3z+2i}{i\bar{z}+6}\right|=\left|\frac{iz\bar{z}+6z-3z-2i}{i\bar{z}+6}\right|=\left|\frac{3z+2i}{i\bar{z}+6}\right|=|w|=1$$

που σημαίνει ότι $|z-w|_{min}=|z-w|_{max}=1$

Σχόλιο

Στην άσκηση αυτή τόσο η αλγεβρική προσέγγιση με την ανισότητα όσο και η γεωμετρική λύση οδηγούν σε τελείως εσφαλμένα συμπεράσματα, διότι οι μιγαδικοί *z , w βρίσκονται σε αλληλεξάρτηση και έτσι δεν μπορούν να βρεθούν συγχρόνως στις κατάλληλες θέσεις ώστε να προκύψουν γεωμετρικά η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή για την απόστασή τους. Πιο συγκεκριμένα , οι εικόνες των μιγαδικών αυτών βρίσκονται στην ίδια ευθεία με το O και έτσι ποτέ δεν μπορούν να απέχουν 3 ή 1 , παρά όσο η διαφορά των ακτίνων τους , δηλαδή 1.*

Άσκηση 5η

Δίνονται οι μιγαδικοί z , w με $w=\dfrac{2z-i}{2+iz}$ και $|z| = 1$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας N του w.

β) Να αποδείξετε ότι $|z-w|\leq 2$

γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $K=|w-z|$

Λύση

α) Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι αφού $|z| = 1$, ο w ορίζεται για όλες τις τιμές του z που οι εικόνες τους βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο(ο παρονομαστής μηδενίζεται μόνο για $z=-2i$, τιμή που απορρίπτεται διότι δεν έχει μέτρο 1).

Επειδή $|z|=1$, είναι επίσης $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$, οπότε :

$$\bar{w}=\frac{2\bar{z}+i}{2-i\bar{z}}=\frac{\frac{2}{z}+i}{2-\frac{i}{z}}=\frac{2+iz}{2z-i}=\frac{1}{w}$$

Από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι $|w| = 1$, που σημαίνει ότι η εικόνα N του w γράφει τον μοναδιαίο κύκλο , δηλαδή τον κύκλο C : $x^2+y^2=1$

β) Είναι

$$|z-w|\leq|z|+|w|=1+1=2$$

γ) Είναι $|z-w|\leq 2$.Αλλά για να έχουμε ισότητα πρέπει οι z , w να είναι αντίθετοι , δηλαδή πρέπει w = - z . Η εξίσωση όμως αυτή είναι αδύνατη , οπότε το μέγιστο δεν είναι το 2 .

Στην πιθανή μέγιστη τιμή 2 μπορούμε να φτάσουμε επίσης παρατηρώντας ότι οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων M , N των z , w αντίστοιχα ταυτίζονται και μάλιστα είναι οι μοναδιαίοι κύκλοι. Η μέγιστη λοιπόν τιμή του $K=|w-z|$ θα περίμενε κανείς να είναι το μήκος μιας διαμέτρου , δηλαδή 2. Τα συμπεράσματα όμως αυτά είναι παραπλανητικά , διότι , όπως έχουμε ξαναπεί , τα σημεία M , N αλληλεξαρτώνται και δεν μπορούν να βρεθούν σε αντιδιαμετρικές θέσεις. Την μέγιστη τιμή πρέπει επομένως να αναζητήσουμε με άλλον τρόπο.

Είναι

$$K=|w-z| =|\frac{2z-i}{2+iz}-z|=|-\frac{i(z^2+1)}{2+iz}|=|\frac{z^2+1}{2+iz}|$$

Θέτουμε z = x + yi , οπότε μετά την αντικατάσταση , την εφαρμογή του ορισμού του μέτρου και την εκτέλεση των πράξεων παίρνουμε :

$$K=|w-z| =|\frac{z^2+1}{2+iz}|=\sqrt{\frac{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}{(2-y)^2+x^2}}=2\sqrt{\frac{1-y^2}{5-4y}}$$

Στην πορεία χρησιμοποιήσαμε και τις σχέσεις

$$x^2+y^2=1\ ,\ x^2=1-y^2$$

και προαιρετικά η $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=1-2x^2y^2$

Με τη βοήθεια των παραγώγων βρίσκουμε ότι η συνάρτηση

$$f(y)=\frac{1-y^2}{5-4y} \text{ με } y\in[-1,1]$$

έχει παράγωγο

$$f'(y)=\frac{4(2y^2-5y+2)}{(5-4y)^2}=\frac{8(y-2)(y-\frac{1}{2})}{(5-4y)^2}$$

οπότε στο $y\in[-1,1]$ έχει ελάχιστη τιμή το 0 (για y = 1 και y = -1) και μέγιστη τιμή για $y=\frac{1}{2}$ την $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

Επομένως η παράσταση

$$K=|w-z| = 2\sqrt{\frac{1-y^2}{5-4y}}=2\sqrt{f(y)}$$

έχει ελάχιστη τιμή το 0 και μέγιστη το 1 .

- Την ελάχιστη τιμή την έχουμε για $z=\pm i$, διότι για y = 1 ή y = -1, η σχέση $x^2+y^2=1$ δίνει x = 0.

♦ Τη μέγιστη τιμή την έχουμε για $z=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$, διότι για $y=\frac{1}{2}$ η σχέση $x^2+y^2=1$ δίνει $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Άσκηση 6η

Δίνονται οι μιγαδικοί z , w με $w=\frac{z-i}{1+iz}$ και $|z|=1$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας N του w.

β) Να αποδείξετε ότι $|z-w|\leq 2$

γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $K=|w-z|$

Υπόδειξη

α) Όπως και στην άσκηση 5 βρίσκουμε ότι η εικόνα του w γράφει τον κύκλο

$$C: \ x^2+y^2=1$$

β) Απλή εφαρμογή της βασικής ανισότητας.

γ). Ελάχιστο είναι το μηδέν , αλλά δεν υπάρχει μέγιστο. Μετά τις πράξεις βρίσκουμε ότι:

$$K=|w-z| =|\frac{z^2+1}{1+iz}|=....= 2\sqrt{\frac{1+y}{2}}$$

με $y\in[-1,1)$.Άρα τη παράσταση K παίρνει μόνο τις τιμές του διαστήματος $[0,2)$ και έτσι δεν έχει μέγιστο.

Ασκήσεις για εξάσκηση

Άσκηση 7η

Δίνονται οι μεταβλητοί μιγαδικοί αριθμοί z , w με |z| = 4 και $w=z+\frac{4}{\bar{z}}$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ του z.

β) Να αποδείξετε ότι $3 \le |w| \le 5$

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας Ν του w

δ) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \le 9$

ε) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$

Υπόδειξη

α) Ο κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 4

β) Είναι

$$|z|-|\frac{4}{\bar{z}}|\le|z+\frac{4}{\bar{z}}|\le|z|+|\frac{4}{\bar{z}}| \Leftrightarrow 4-\frac{4}{4}\le|w|\le 4+1$$

διότι $|\bar{z}|=|z|=4$

γ) Είναι η έλλειψη με εξίσωση

$$(\,C\,):\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

δ) Είναι

$$|z-w|\le|z|+|w|\le 4+5=9$$

ε) Είναι

$$|w-z|=\ldots=|\frac{4}{\bar{z}}|=1$$

δηλαδή η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z - w|$ είναι 1 και όχι 0 ή 9 αντίστοιχα που δείχνει η γεωμετρική εποπτεία !

Άσκηση 8η

Δίνονται οι μιγαδικοί z , w με |z| = 1 και w = - z .

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ του w.

β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \le 2$

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = |z - w|$

δ) Θεωρούμε τα σύνολα

$$A=\{z\in C\ /\ |z|=1\}\quad ,\ B=\{w\in C\ /\ w=-z\ \text{ και }\ z\in A\}$$

Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$K=|\alpha-\beta|\ \text{ με }\ \alpha\in A\ \text{ και }\ \beta\in B$$

Υπόδειξη

α) Ο μοναδιαίος κύκλος

β) Με χρήση της βασικής ανισότητας.

γ) Είναι πάντα $A = 2$, οπότε η ελάχιστη τιμή δεν είναι 0, όπως δείχνει η εποπτεία , αλλά 2.

δ) Στην περίπτωση αυτή η γεωμετρική απεικόνιση των συνόλων Α και Β δείχνει καθαρά ότι η ελάχιστη τιμή του Κ είναι 0 και η μέγιστη είναι 2 .

Άσκηση 9η

Δίνονται οι μιγαδικοί α , β με $|\alpha| = 3$ και $|\beta| = 4$ καθώς και η παράσταση

$$A(\alpha,\beta) = |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|$$

α) Αν $\alpha = 3$ και $\beta = 4i$, να αποδείξετε ότι $|\alpha^2 - \beta^2| = |\alpha|^2 + |\beta|^2$

β) Να αποδείξετε ότι $6\le A(\alpha , \beta) \le 14$

γ) Να αποδείξετε ότι **:**

$$A(\alpha,\beta) = \sqrt{50+2|\alpha^2-\beta^2|}$$

δ) Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της παράστασης Α(α , β) και να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τα αποτελέσματα του ερωτήματος β). Τι παρατηρείτε και πώς ερμηνεύετε τις διαφορετικές τιμές που προκύπτουν ;

Υπόδειξη

α) Είναι απλή αντικατάσταση και εκτέλεση των πράξεων.

β) Είναι

- $|\alpha-\beta| \le |\alpha|+|\beta|=3+4=7$ και
- $|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|=3+4=7$

Επομένως $A(\alpha,\beta) \le 7+7=14$.Επίσης είναι :

$$A(\alpha,\beta) = |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta| \ge |(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)|=|2\alpha|=2|\alpha|=6$$

γ) Υψώνουμε στο τετράγωνο τη δοσμένη παράσταση και χρησιμοποιούμε την βασική ιδιότητα του μέτρου : $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

δ) Είναι

$$|\alpha^2 - \beta^2| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 9 + 16 = 25$$

με ισότητα πχ για α = 3 και β = 4i , σύμφωνα με το ερώτημα α). Άρα η μέγιστη τιμή για την παράσταση Α(α,β), όπως προκύπτει από το ερώτημα γ) είναι η

$$A_{max} = \sqrt{50 + 2 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10$$

Ανάλογα είναι :

$$|\alpha^2 - \beta^2| \geq |\beta|^2 - |\alpha|^2 = 16 - 9 = 7$$

με ισότητα για πχ α = 3 και β= 4 . Επομένως η ελάχιστη τιμή για την παράσταση Α(α,β) , όπως προκύπτει από το ερώτημα γ) είναι

$$A_{min} = \sqrt{50 + 2 \cdot 7} = \sqrt{64} = 8$$

Γενικό σχόλιο

Έστω z , w μιγαδικοί αριθμοί , μη μηδενικοί. Με εφαρμογή της βασικής ιδιότητας του μέτρου $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ αποδεικνύεται ότι :

i) |z + w| = |z| + |w| , αν και μόνο αν οι εικόνες Ο , Μ , Ν των μιγαδικών 0 , z , w αντίστοιχα είναι συνευθειακά σημεία και μάλιστα το Ο δεν είναι μεταξύ των Μ, Ν , δηλαδή όταν τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ είναι ομόρροπα.

ii) |z - w| = |z| + |w| , αν και μόνο αν οι εικόνες Ο , Μ , Ν των μιγαδικών 0 , z , w αντίστοιχα είναι συνευθειακά σημεία και μάλιστα όταν το Ο είναι μεταξύ των Μ, Ν. Με άλλα λόγια , όταν τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ είναι αντίρροπα.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και στις περιπτώσεις που

$$|z - w| = ||z| - |w|| \text{ ή } |z + w| = ||z| - |w||$$

Με βάση λοιπόν αυτές τις παρατηρήσεις εξηγούνται τα διαφορετικά αποτελέσματα στα οποία οδηγούν οι διαφορετικές προσεγγίσεις σε ορισμένες από τις ασκήσεις που προηγήθηκαν.

Σημείωση :

*Ευχαριστώ το συνάδελφο **Αντώνη Κυριακόπουλο** για μερικές πολύ βασικές παρεμβάσεις στο παραπάνω κείμενο καθώς και τον καθηγητή κύριο **Μ. Λάμπρου** από το πανεπιστήμιο Κρήτης που διάβασε το κείμενο και διόρθωσε ορισμένες αβλεψίες.*